ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣ/ΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 111

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 104

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 128

Α4. Α: Λάθος, **Β:** Λάθος, **Γ:** Λάθος, **Δ:** Σωστή, **Ε:** Σωστή.

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Το πεδίο ορισμού της f=goh είναι:

$$A_f=\{x\in A_h / h(x)\in A_g\}=\{x\in(0,+\infty)/\ \ell nx\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$$

Ο τύπος της $f(x)=(goh)(x)=g(h(x))=g(\ell nx)=$

$$\frac{4-e^{2\ell nx}}{e^{\ell nx}}=\frac{4-e^{\ell nx^2}}{e^{\ell nx}}=\frac{4-x^2}{x}\quad \text{με } x>0$$

Β2. i) Η f(x) είναι παραγωγίσιμη για x>0 με:

$$f'(x)=\frac{\left(4-x^2\right)'x-\left(4-x^2\right)x'}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}<0.\quad \text{Άρα } f(x)\searrow \text{ για } x>0$$

ii) Είναι $\pi > e \overset{f\searrow}{\Longrightarrow} f(\pi)<f(e)\Rightarrow \frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Rightarrow\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$ γιατί $4-e^2<0$

Β3. Η f(x) ορίζεται στο $x\in(0,+\infty)$

- Κατακόρυφη ασύμπτωτη: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x}=+\infty$ γιατί

  $\lim\limits_{x\to0^+}4-x^2=4>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ με x>0

  Άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
- Πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$ (λ=−1) και

  $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ (β=0)

  Άρα η ευθεία y=-x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

Β4. Είναι $-1 \le \sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right) \le 1$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Άρα $f(x) < 0$ για $x \to +\infty$.

Έτσι η σχέση γράφεται: $-\dfrac{1}{f(x)} \ge \dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} \ge \dfrac{1}{f(x)}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = 0$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1. $\int_2^3 xf(x)dx = 1 \Rightarrow \int_2^3 x\left(\dfrac{1}{x}+\alpha\right)dx = 1 \Rightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)dx = 1 \Rightarrow \left[x+\dfrac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

Γ2. i) Πρέπει η f(x) να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$. Έτσι:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{2x-3}{1} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} \underset{DLH}{=} \lim_{x\to1+}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1$$

Οπότε η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1) = -1$ και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης στο x_0 είναι :

$\varepsilon : y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 1 = -1(x-1) \Rightarrow y = -x+2$

Η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x΄x είναι $\omega = \dfrac{3\pi}{4}$ αφού $\lambda_{\varepsilon} = \varepsilon\varphi\omega = -1$

Γ3. Για $x < 1 : f'(x) = 2x-3 < 0$

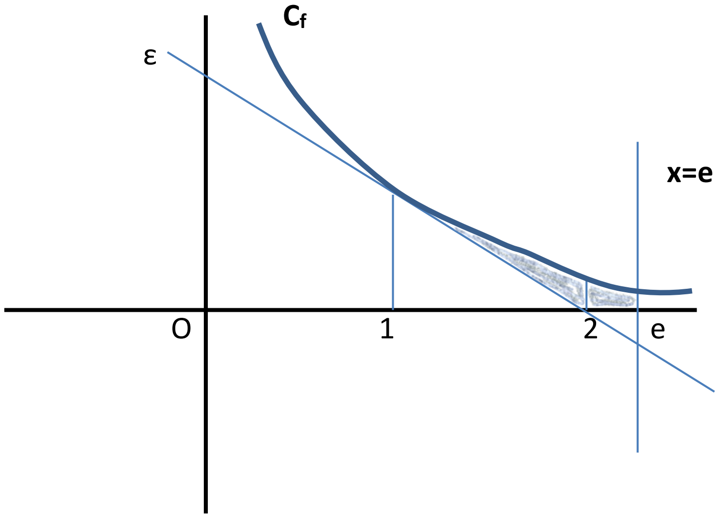
για $x \ge 1 : f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$

και επειδή η f(x) είναι συνεχής στο $x_0=1$ ως παραγωγίσιμη η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_f = \mathbb{R}$ άρα και «1 – 1» .

Το σύνολο τιμών είναι $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$

ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ

Γ4.



Το εμβαδόν που δημιουργείται από τις Cf, ε, x΄x είναι:

$$E = E_1 + E_2 = \int_1^2 |f(x) - (-x+2)|\,dx + \int_2^e |f(x)|\,dx$$

Επειδή $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$ για x>1 η f(x) είναι κυρτή άρα η Cf είναι πάνω από την ε, άρα:

$$E = \int_1^2 \left(x - 2 - \frac{1}{x}\right)dx + \int_2^e \frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x - \ell nx\right]_1^2 + \left[\ell nx\right]_2^e = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x) - 2x}{x-1} \Rightarrow f(x) = (x-1)g(x) + 2x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 \cdot \ell + 2 = 2 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 1}\left[\ell n(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa\right] = 2 \Rightarrow -1 + \kappa = 2 \Rightarrow \kappa = 3$$

Δ2. Η f(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, έτσι:

$f'(x) = \dfrac{(2-x)'}{2-x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-x^2 - x + 2}{x^2(2-x)}$ με $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ ή x=1

Άρα

x	0	1	2
f′(x)	+	0	–
f(x)	↗	Ο.Μ.	↘

Στο A₁=(0, 1] η f(x) είναι γνησίως αύξουσα, άρα $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

Το μηδέν ανήκει στο f(A₁), άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1$ με $f(x_1)=0$

Στο A₂=[1, 2) η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} \ell n(2-x) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ell nu = -\infty$ με u=2–x

ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ

Το μηδέν ανήκει στο $f(A_2)$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2$ με $f(x_2)=0$.
Έτσι η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2.
Έστω $x_1 < \frac{1}{3} \overset{f \text{ γνησ. αύξ}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ell n\frac{5}{3}$ που ισχύει

Δ3. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right] \subset (0,1)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subset (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Άρα στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ η κλίση της C_f ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Επίσης $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ για $x \in (0, 2)$, άρα $f'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$, οπότε το $\xi \in (0, 1)$ είναι μοναδικό.

Δ4. i) Επειδή F και G είναι αρχικές συναρτήσεις της f ισχύει ότι: $G(x) = F(x) + c$ για $x \in (0, 2)$.

Για $\left.\begin{array}{l} x = x_1 : G(x_1) = c \\ x = x_2 : F(x_2) = -c \end{array}\right\} G(x_1) + F(x_2) = c - c = 0$. Άρα $G(x_1) = -F(x_2)$ ①

ii) Έστω συνάρτηση $h(x) = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με $h(x_1) = x_2G(x_1) + x_1 - x_2 \overset{(1)}{=} -x_2F(x_2) + (x_1 - x_2)$
$h(x_2) = x_1F(x_2) + (x_2 - x_1)$
Όμως η $F(x)$ είναι αρχική της $f(x)$ άρα $F'(x) = f(x)$

Για $\left.\begin{array}{l} x_1 < x < 1 \overset{f \text{ γν. αύξ}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x) \\ 1 < x < x_2 \overset{f \text{ γν. φθίν}}{\Rightarrow} f(x) > f(x_2) \Rightarrow f(x) > 0 \end{array}\right\} f(x) > 0$ για $x \in (x_1, x_2)$.

Έτσι $F'(x) > 0$, οπότε $F(x)$ γνησίως αύξουσα με $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) > F(x_1) \Rightarrow F(x_2) > 0$
Άρα $h(x_1) < 0$ και $h(x_2) > 0$, από Θ. Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ με
$h(x0) = 0 \Rightarrow x_1F(x_0) + x_2G(x_0) = x_1 + x_2 - 2x_0$
Επειδή $h'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$ η $h(x)$ είναι γνησίως μονότονη,
άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ