Συναρτήσεις

1. Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο R τέτοια ώστε να ισχύει $f\left(\frac{x+f(x)}{2}\right)=x$, για κάθε $x \in R$.

Να δείξετε ότι f(x) = x , για κάθε $x \in R$.

2. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R και τέτοια ώστε $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1 .

β) Να βρείτε $f(1)$ και $f(2+\ell n2)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x-4}-e^{2x+1}=x+5$.

3. Έστω $f: R \to R$ ώστε f(x+y) = f(x) + f(y) για κάθε x, $y \in R$.

Αν η C_f τέμνει τον x΄x σε ένα ακριβώς σημείο τότε:

α) Να δείξετε ότι: $f(0)=0$

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

γ) Να δείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x^2+2009)+f(x^2-2009)=2f(6x-9)$

ε) Για κάθε α, β $\in$ f(R) να δείξετε ότι: $f^{-1}(\alpha+\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)$

4. Α. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

$$f^{-1}(x)=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x$$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1+\sqrt{x-3}$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x)=f(x)$

Όριο –Συνέχεια συνάρτησης

5. α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)=0$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

δ) Έστω οι συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x))=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))=0$.

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

ε) Έστω οι συναρτήσεις h, φ τέτοιες ώστε $h^2(x)+\varphi^2(x)\le 2h(x)\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$.

6. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell\in R$ και $f(x)\eta\mu 2x\le x^3\eta\mu\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in R^*$.

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf^3(x)+\eta\mu 2x}{\eta\mu x+x^2}$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με δ<0, α+β+γ+δ=0 και 3α+2β+γ<0.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

8. Έστω η συνάρτηση f που είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο R. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

9. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο [1, 4] για τις οποίες ισχύουν:

α) $f(x)\neq 0$, $x\in[1,4]$ β) $f(1)>0$

γ) $f(1)f(2)=f(3)f(4)$ δ) $g(x)=[f(x)]^2-f(1)f(2)$

Να δείξετε ότι:

i) $f(x)>0$, $x\in[1,4]$

ii) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $g(x_1)=0$

iii) η f δεν είναι 1 – 1 .

10. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών [α, β]. Αν ισχύει $\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le \frac{\left|x_1-x_2\right|}{2}$, για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι:

α) η f συνεχής στο [α, β]

β) η $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο [α, β].

γ) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^x-1$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^x=1-x$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}\left(f(x)-x+1\right)>1$

δ) Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\Re\to\Re$ η οποία για κάθε $x\in\Re$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$. Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι γνησίως αύξουσα

ii) η C_g διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(g\circ g)(x)-g(1-x^{2012})=0$, έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0,1).

12. Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, συνεχής και ισχύει $xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ και ισχύει: $f^3(x)+f(x)=x^3$ για κάθε $x\in\Re$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1 – 1

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική λύση στο διάστημα (-1, 1)

γ) Να δείξετε ότι για κάθε x>0 είναι f(x)<x

δ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}$

ε) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

14. Αν $f(x)=\begin{cases} g(x)\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ και g(0) = g΄(0) = 0, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0= 0.

15. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού (0, 1) και $0<f(x)<1$, 4 φορές παραγωγίσιμη ώστε $f^2(x)+(f'(x))^2=1$. Να δείξετε ότι: $f^{(4)}(x)=f(x)$.

16. Αν f πολυωνυμική συνάρτηση ώστε f΄(4)=0 και $(f'(x))^2=f(x)$, για κάθε $x\in R$, να βρείτε τον τύπο της.

17. Έστω $P(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$, όπου $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, διαφορετικά μεταξύ τους.

a. Να δείξετε ότι:

i) $\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{1}{x-\rho_\nu}$

ii) Το $P''(x)\cdot P(x)-(P'(x))^2$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

18. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο (0, 0), Α (α, 0) με α>0. Ένα σημείο Μ κινείται από το Ο προς το Α με ταχύτητα υ = λcm/sec. Αν Κ η προβολή του Μ στην ευθεία ΟΒ να βρείτε:

α) Το εμβαδό Ε(t) του τριγώνου ΜΟΚ, ως συνάρτηση του χρόνου t.

β) Το ρυθμό μεταβολής του Ε(t) την χρονική στιγμή t_0, που το Μ βρίσκεται στο σημείο Α.

19. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με α>0 και f(α) = f(β) = 0. Να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε ξ f΄(ξ) = f(ξ).

β) Αν $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε το ξ είναι μοναδικό.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Μ (ξ, f(ξ)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

20. α) Αν το πολυώνυμο S(x) είναι περιττού βαθμού, να δείξετε ότι η S(x) = 0 έχει μία τουλάχιστον λύση.

β) Δίνονται τα πολυώνυμα P(x) και Q(x), ώστε $P(x)\neq Q(x)$ και $P''(x)\neq Q''(x)$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x)=Q'(x)$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) Αν για το πολυώνυμο f(x) ισχύει: $f(x)\cdot f''(x)+f^7(x)\cdot f''(x)=g(x)$ με g(x) πολυώνυμο που δεν έχει ρίζα στο R, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση f΄(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση.

21. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 1], με συνεχή παράγωγο στο [0, 1] και τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$ και $f'(0)>0$. Να δείξετε ότι:

α) Αν $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_g στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x΄x.

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

22. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R ώστε $f'(x) + 2f(x) = 2$ για κάθε $x \in R$ και $f(0)=0$.
Να βρείτε τον τύπο της f.

23. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με f(0) = 0.

α) Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$,είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $g'(x) = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right)$.

γ) Αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(\alpha^2) > \alpha f(\alpha) > \alpha^2 f(1)$, για α>1.

24. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 1] με f' γνησίως αύξουσα και $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $f(x) < xf'(x)$, $x \in (0, 1)$

β) $f(x) < x$, $x \in (0, 1)$

25. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)>2012$, για κάθε $x \in \Re$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2011x+2013 έχει ακριβώς μια ρίζα.

26. Α) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α, δ] και α<β<γ<δ με $f(\gamma) < f(\alpha) < f(\delta) < f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \delta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{\beta}{x}\right)-1+\frac{\beta}{x}$, με 0<α<β

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι: $\left(\frac{e\alpha}{\beta}\right)^{\alpha}<e^{\beta}$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x},\ x\in[1,5]$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

β) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση f(x)=2α – 6, έχει μία τουλάχιστον λύση.

29. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ να δείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ είναι $f(x_1)+f(x_2)\geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

30. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ με f΄ συνεχή στο $\Re$ και ισχύει $f(f(x))+x^3+x=f(x)$, για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$

31. α) Να αποδείξετε ότι: $e^x - x\geq 1$, για κάθε $x\in\Re$

β) Να βρείτε όλους τους x, ψ $\in\Re$ ώστε να ισχύει: $\left(e^x-\psi\right)^2+\left(x-\psi\right)^2=\frac{1}{2}$

32. α) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=2^x-3x$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=x έχει ακριβώς δυο ρίζες.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\rightarrow\Re$, τέτοια ώστε να ισχύει: $f(2^x-3x)=2^{f(x)}-3f(x)$, για κάθε $x\in\Re$

i) να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0\in\Re$ τέτοιος ώστε $f(f(x_0))=x_0$.

ii) αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\Re$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\Re$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\xi$.

33. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε g(x)>0 και $g''(x)g(x)-[g'(x)]^2>0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g\left(\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}\right)\leq\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1,x_2\in R$

ΘΕΜΑ 1ης ΔΕΣΜΗΣ 1997

34. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν: $f(x)>0$, x>0 και $f'(x)+2xf(x)=0$, x>0 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, 1).

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι: $\frac{x-1}{2x^2}f(x)<\int_1^x \frac{f(x)}{2t^2}dt<\frac{x-1}{2}$, x>1

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση: $F(x)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$, x>1

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$, για κάθε x > 1.

ΘΕΜΑ 1ης ΔΕΣΜΗΣ 1998