ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

I. ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Έστω συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)+\frac{1}{2}x=0$ για κάθε x ∈ R.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f^{-1}

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}\left(x^3-x\right)=f^{-1}(3-3x)$

2. Έστω συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)-x=0$, για κάθε x ∈ R και f(R)=R.

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να βρείτε την f^{-1}

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(\ln x+f^{-1}(x)-x-1\right)=0$

3. Έστω συνάρτηση f: R → R με f(R)=R, για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)-e^x-x+1=0$, x ∈ R.

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(f^3(x)+f(x)\right)=0$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+2017x-2018$ και g: R → R για τις οποίες ισχύει f(x) – g(x) = κx, κ ∈ R* .

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2.

β) Υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης g(x)=0 μεταξύ των ρ_1 και ρ_2.

γ) Υπάρχει ξ μεταξύ των ρ_1 και ρ_2 τέτοιο ώστε $g(\xi)=\frac{g(\rho_1)+2g(\rho_2)}{4}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $3f^3(x)+2x^2f(x)=3\eta\mu^3x$ (1) για κάθε x ∈ R. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\alpha$ τότε:

α) Να δείξετε ότι η α=1.

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f((fx))}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x^2-x)}{x^2-3x+2}$

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $f^2(x)+2f(x)\eta\mu x=x^2+\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε x ∈ R και f(0) = 1.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = f(x) + ημx, x ∈ R διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\eta\mu x$

γ) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$

ΙΙ. ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: R → R, για την οποία ισχύει $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-\sqrt{2x}}{x-2}=-\frac{5}{2}$

και f(x)=f(x+4) για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_1=6$.

γ) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0=2$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2+2x+2λ$.

δ) Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Ox και Oy αντίστοιχα. Ένα δοκάρι είναι τοποθετημένο κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Το κάτω μέρος του δοκαριού ολισθαίνει πάνω στον ημιάξονα Οx με ρυθμό 1m/s. Τη χρονική στιγμή t_0 που η κορυφή του δοκαριού απέχει από την αρχή των αξόνων 3m, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής.

i) της οξείας γωνίας θ που σχηματίζει το δοκάρι με τον χ΄χ.

ii) την ταχύτητα που πέφτει το πάνω μέρος του δοκαριού.

(Δίνεται ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήμος ΑΒ είναι ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ όπου Γ, Δ τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε του προηγούμενου ερωτήματος με τους άξονες.)

2. Έστω οι συναρτήσεις f, g: R→ R για τις οποίες ισχύει:

- $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in R$
- f(A) = R
- $g(x) = e^x + x + 1$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g αντιστρέφονται

β) Να υπολογίσετε το $(f^{-1})΄(0)$

γ) Αν θεωρήσουμε ότι η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε το $(g^{-1})΄(2)$.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με f΄(0)=1.

3. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$ και f(0) = f(1).

α) Να αποδείξετε ότι η f΄ αντιστρέφεται.

β) Η γραφική παράσταση της f δέχεται ακριβώς μία οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Η εξίσωση f(x)=0 έχει το πολύ 2 ρίζες.

δ) Υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+(2\xi-1) f(\xi)=0$.

ε) Υπάρχει $x_0 \in [0 ,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)+f(0,2)+f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$.

4. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι:

$$f'(x)f(x)-e^{-x}\left(f(x)-f'(x)\right)-e^{-2x}=0 \text{ και } f(0)=2$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=3-e^{-x}$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής [α, β] στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-\beta}(\beta-\alpha) \le e^{-\alpha} - e^{-\beta} \le e^{-\alpha}(\beta-\alpha)$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-1}-e^{-x}}{x-1}=\dfrac{1}{e}$

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in R$ για το οποίο ισχύει ότι $f(f(x_0))=\dfrac{3e-1}{e}$.

5. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$$xf'(x) - xf(x)=e^x \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=e.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x(\ln x+1)$, $x>0$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $\ln x - ke^{-x} +1 = 0$
για τις διαφορετικές τιμές του πραγματικού αριθμού k.

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

6. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με $f(\alpha) < f(\beta) =0 < f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \ge f'(\xi)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho) <0$.

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^3 = \alpha^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β).

7. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=(x+1)lnx.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^{x+1}= e^{2017}$, x>0 έχει μοναδική λύση.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της C_f.

δ) Να δείξετε ότι $\frac{x+1}{x-1} > \frac{2}{\ln x}$, για κάθε x>1.

ε) Να δείξετε ότι $f\left(e^x - x\right) > f\left(\frac{2+x^2}{2}\right)$, για κάθε x>0.

8. Έστω f: [0, + ∞) R μία συνάρτηση με f(0)=0, η οποία είναι κυρτή.

α) Να δείξετε ότι f(x+1) – f(x)>f΄(x), για κάθε x $\in$ (0, + ∞).

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = (x+1) f(x) –x f(x+1) – x +2, x $\geq$ 0 είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Να δείξετε ότι: $f(x) < \frac{2}{3} f\left(\frac{3x}{2}\right)$, για κάθε x>0.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό α $\in$ (0, 2), ώστε $\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \frac{\alpha-2}{\alpha^2+\alpha}$

9. Δίνεται η συνάρτηση f: (0, e)→ R με f(1) =0 η οποία ικανοποιεί τη σχέση $xf'(x)= e^{f(x)}$ για κάθε x $\in$ (0, e).

Α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για κάθε x $\in$ (0, e).

Β) Αν $f(x) = -\ell n(1-\ell nx)$, x $\in$ (0, e)

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, e).

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1-\ell nx = \frac{1}{e^{\alpha}}$, για τις διάφορες τιμές του α $\in$ R.

10. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) = \dfrac{2e^x + x^2}{e^x + x^2}$ για κάθε $x \in R$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτο το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+2010) - f(x)\right)$.

11. Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = 0$. Αν η συνάρτηση fof' ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $(fof')(x) = -f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) $f'(1)=1$

δ) $(f' o f')(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ε) $xf''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

στ) $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to R$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(e^x + 1) = x + e^x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in R \ (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)= \ln(x-1) + x$, $x \in (1, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2+1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x + 1) - 1 = f^{-1}(e^2 + 3)$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$ με $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$.
Αν υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma)<0$, να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα (α, β).

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $2\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

γ) Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in (\alpha, \beta)$ με $\kappa \neq \lambda$ τέτοια, ώστε $f'(\kappa)f'(\lambda) < 0$.

δ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$

14. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της για κάθε $x \in R$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο R.

δ) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$, για κάθε $x>0$.

ε) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

15. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(0) \neq 0$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} - e \cdot f(x) = x^2$, για κάθε $x \in R$.

α) Να βρεθεί το $f(0)$.

β) Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\frac{f(x)-f(0)}{x} > 0$, για κάθε $x \neq 0$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x^2) - f(1+2\ln x) \geq 0$, για κάθε $x > 0$.

16. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 4]$.

Α) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τότε να δειχθεί ότι:

α) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο R.

β) Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in R$, τέτοιος ώστε $f''(\xi) = -f'(\xi)$

γ) Η εξίσωση $f'(x) = (e^x + x^2) f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Β) Έστω επιπλέον συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το R, παραγωγίσμη με παράγωγο g΄ συνεχή και γνησίως μονότονη. Αν ισχύει $g'(f(x)+1) = e^x f(x)$, για κάθε $x \in R$, να δειχθεί ότι: $g(x) \geq g(1)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ με $x>0$ και η συνάρτηση $f(x)=x^2-\text{συν}x+g(\alpha)$ με $x \in R$ και $\alpha>0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Για τις διάφορες τιμές του α, να βρεθεί πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Για $\alpha=1$:

i) Να αποδειχθεί ότι το σημείο $M(0, -2)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτομένες της C_f.

ii) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο N(x, y) της C_f, με $x \in (0, 1)$, όπου κατά τη χρονική στιγμή t_0, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του $y'(t_0)$ είναι διπλάσιος από αυτόν της τετμημένης του $x'(t_0)$, αν υποθέσουμε $x'(t_0), y'(t_0) \neq 0$.

δ) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x+1)-g(x)]$.

18. Έστω συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $A=[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)e^{f(x)}=x$, για κάθε $x \in A$.

α) Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β) Να αποδειχθεί ότι: $\frac{\ln x}{2} < f(x) < x$, για κάθε x>0.

γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρεθεί η αντίστροφη της f και να δειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x_0=0$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $f^2(\alpha)=\ln\left[f^2(\alpha)+e-1\right]$, αν α>0.

19. A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x + x - 1$. Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 και να βρείτε το πρόσημο της f.

B) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+x(1-\ln x)-1$.

α) Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της C_g.

20. Έστω μια συνάρτηση $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2xf(x)f'(x) - 1=0$ για κάθε x>1 και f(e) =1.

α) Να δείξετε ότι η f είναι θετική και γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$, να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο A(e, 1) και να δείξετε ότι $2e\sqrt{\ln x} \le x+e$ για κάθε x>1.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x + x$ και η $g: R \to R$ για την οποία ισχύει $g^3(x) + g(x) - x = 2e^x$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

β) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $g(f(x))>1$.

22. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 4] \to R$ για την οποία ισχύει:

- $f(0)=0$, $f(2)=2$, $f(4)=2$
- f παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$
- f' συνεχής στο $(0, 4)$

Να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_1 \in (0, 4)$ ώστε $f'(x_1)=1$

β) Υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{1}{4}$

γ) Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 4)$: $f''(x_0)<0$

23. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με συνεχή παράγωγο και ισχύουν:

- $f'(-1)<1<f'(1)$
- $f(0)=1$
- $(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{1}{x^2+1} = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, $x \in R$.

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία και την κυρτότητα της f.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

ε) Δίνεται $h(x)=\ln f(x)$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:

i) $h'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

ii) $h(x)>\frac{f(x)-x-1}{x}, x \in (0,+\infty)$

iii) $f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)f(\beta)$, όπου $1<\alpha<\beta$

24. Έστω η f δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν $f(x+1)=f(3-x)$ και $f''(x) \neq 0$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x)=0$.

β) Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο [0, 3] και ισχύει $f(0) < f(1) = f(3)$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ολικών ακροτάτων στο [0, 3].

25. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x+1$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in R$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in R$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ για κάθε $x \geq 0$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

δ) Να αποδείξετε ότι η f(x) είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα κάτω.

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

στ)Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$

26. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(2) = 2$
- $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu 3x} = 3$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=9$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0, f(0)).

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (0, 2).

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=2-\xi$.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=1$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right)e^{-x}$, $x \in R$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να δείξετε ότι $e^x \geq \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$, $x \in R$.

δ) Έστω η συνάρτηση g: R→ R ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{g(x)}-g(x)-\frac{g^3(x)}{6}\right)=1$.

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

28. Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε να ισχύει

$f(x)\leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$ για κάθε x πραγματικό.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$.

β) Να δείξετε ότι $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi)=0$.

29. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^3(x)+3f(x)=x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να μελετηθεί η μονοτονίας της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f.

δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το οποίο και να προσδιορίσετε.

ε) Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{f(\alpha)}{\alpha} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

στ) i) Να βρεθεί η μονοτονία της $g(x)= f(x) - x$.

ii) Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 - x) + x < x^2$.

30. Έστω συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to R$ που είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει $f(x) + f(f(x))=2x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η $f(x) \geq 0$ για $x \in [0, +\infty)$ και ότι $f(0) = 0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^{f(x)}}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(x)-1} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0, 1).

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της A(1, f(1)).

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \in R^*$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\frac{1}{x}} = \frac{\alpha}{x}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$.

ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$.

32. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με f(0)=0 και ικανοποιεί τη συνθήκη $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0-2h)}{h} = -10x_0e^{f(x_0)}$ για κάθε $x_0 \in R$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = -2xe^{f(x)}, x \in \Re$

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = -\ell n(x^2+1), x \in \Re$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

δ) Να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)e^{-x} + 2x^2 - 3x + 2$, $x \in R$.

α) Να βρεθούν f' και f'' .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρεθούν τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 και να προσδιορίσετε το πρόσημο της f.

στ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x(x-1) = e^x\alpha - 1$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

γ) Να δείξετε ότι $e^{-x} < 1 - x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(x^2) + \ln x$.

ΙΙΙ. ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ- ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } f(0) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \geq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική πάρασταση της f, την εφαπτομένη της στο $x_0=0$ και την ευθεία $x=\lambda e^{\lambda}$, $\lambda>0$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f'(x+1) > f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x>0$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική πάρασταση της f, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x=1.

3. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x)(f(x)+x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in R \text{ και } f(0) = 1.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

β) Να δείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ε) Να δείξετε ότι $\int_x^{x+1}\sqrt{4t^2+4}dt > 2x+1$ για κάθε $x \in R$.

4. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $xf''(x)+(2-x)f'(x)=f(x)$ για κάθε x>0, f(1)=e και f΄(1)=0. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

β) Να βρείτε το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $3e^{x-3}-x=0$.

γ) i) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να δείξετε ότι $e^{x-2}\ge\dfrac{x^2}{4}$, x>0

δ) Να βρείτε το α>1 για το οποίο ισχύει ότι: $\int_1^{\alpha} f(x)dx=e^3\ln3-\int_1^{\alpha} e^x \ln x dx$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+6x(\ln x-2)+2$, x>0.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

β) Αν x_0 η θέση ελαχίστου της f, να αποδείξετε ότι $x_0\in(1,2)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x(x^2+6\ln x)=2(6x-1)$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln\left[\left(\dfrac{|x|-x}{2}\right)(x^2-1)\right]+x-x\ln(x^2-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-e$.

δ) Δείξτε ότι $x\ln(-x)\le 2x+e$ για κάθε $x<-1$.

ε) Να υπολογίσετε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x= −2e και x=−e.

7. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο R με $f'(x)=g'(x)+1$, $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x \in R$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+3)=0$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+3}{g(x)+2}$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g στο $+\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=x-1$ για κάθε $x\in R$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες x=2 και x=4.

8. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^2(x)-xf(x)+x^2-2x-8=0 \text{ για κάθε } x\in R.$$

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2, 4)$.

δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f^2(x)dx=\int_0^3 xf(x)dx+24$.

9. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με συνεχή πρώτη παράγωγο, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη την ευθεία y=x + 1821.

α) Να βρείτε το $\lambda\in R$ για τον οποίο ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)f(x)-4x+2}{xf(x)-x^2-1820x}=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το R.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f'.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$.

ε) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha+1)-f(\alpha)<\int_{\alpha+1}^{\alpha+2}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\alpha+1}f(x)dx$.

στ) Αν επιπλέον $f(0)=f(1)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0, 1)$.

10. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (0, +∞) για την οποία ισχύει ότι:

$$xf''x+2f'(x)+\frac{1}{x^2}=0 \text{ για κάθε } x>0,\ f(1)=0 \text{ και } f'(1)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

β) Έστω $g(x)=\begin{cases} x^2 f(x), & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

i) Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x=1.

γ) Να αποδείξετε ότι $x^e \le e^x$ για κάθε x>0.

δ) Αν υπάρχει α>0 για τον οποίο ισχύει ότι $x^e \le \alpha^x$, να αποδείξετε ότι α≥ e.

ε) Αν $\lambda f(x) \ge e^x - \frac{e}{x}$ για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι λ=2e.

11. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [0, + ∞) με $f''(x) > e^x + 2$ για κάθε x>0, f΄(0)=1 και f(0)=0. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).

β) $f(x) \ge e^x + x^2 - 1$ για κάθε $x \ge 0$.

γ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

δ) Η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ε) $\int_0^1 f(x)dx > e - \frac{5}{3}$

στ) $\int_0^1 xf''(x)dx = f'(1) - f(1)$

12. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1, 3] με $\int_1^3 f(x)dx = 0$, για την οποία υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$ με $f(x_0) \neq 0$ και F μια παράγουσα της f στο [1, 3].

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 3).

Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, 3].

β) Αν f(1) = f(3)=0, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$ τέτοια, ώστε

$$f''(x_1) \cdot f''(x_2) \leq 0$$

γ) Αν η f γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_1^2 f(x)dx < 0$

ii) Η εξίσωση $x^2F(x) = (x-5)\, f(x) + x^2F(1)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (1, 3).

13. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι:

- $f''(x) - f'(x) = e^x(2x+1)$ για κάθε $x \in$ R
- $f(0) = f'(0) = 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2 - x + 2) - 1,\ x \in$ R

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - x = e^{-x} - 2$.

γ) Αν F αρχική της f, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

δ) Αν F(0)=1, να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή και ισχύει ότι $F(x) \geq x + 1$ για κάθε $x \in$ R.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, x>0.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Αν F αρχική της f, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(F(x+1) - F(x)\big) = 0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία y=x.

15. Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=0.$$

α) Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$ για κάθε x>0.

δ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 \frac{f(t)}{t}dt<\int_3^4 \frac{f(t)}{t}dt$.

16. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει ότι:

$f'(x)(x^2+1)-f(x)(x-1)^2=0$ για κάθε x ∈ R, f(x)>0 και f(0)=1.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $e^x-\lambda x^2=\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Έστω F αρχική της f με F(0)=0.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (0, 2) τέτοιο ώστε $2e^{\xi}=\left(\xi^2+1\right)\int_0^2 f(t)dt$.

δ) Να δείξετε ότι $2e^{\xi}>\left(\xi^2+1\right)\int_0^1 \frac{e^t}{t^2+1}dt$..

ε) Να δείξετε ότι $(x-1)F(x-1)<xF(x)$, x>1

17. Έστω f: (0, + ∞) →R μία συνάρτηση με f(1)=1, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$1+2x^2f(x)=x^3(3-f'(x)), \text{ για κάθε } x>0.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}$, x>0.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{f(x)-1}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την πλάγια ασύμπτωτη ε της C_f στο $+\infty$ και την ευθεία x=λ, λ>1.

Στη συνέχεια, να δείξετε ότι το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$ είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία ε και την ευθεία $x=e^{-1}$.

18. Έστω f: R →R μία συνάρτηση με f(R)=R, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f^{3}(x) + f(x) = 2x,\ \text{ για κάθε }\ x \in R.$$

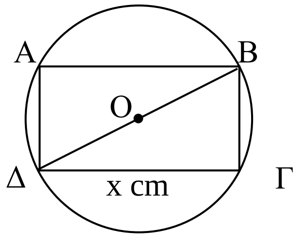
α) Να βρείτε τις ρίζες της f, το πρόσημό της, να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

β) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να την βρείτε.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=1.

δ) Αν $A(x, f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$, $x \in R$ σημεία των $C_{f^{-1}}$ και C_f αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των $C_{f^{-1}}$ και C_f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

19. Σε ένα κύκλο ακτίνας ρ=1cm εγγράφουμε ένα ορθογώνιο με μήκος x cm.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x είναι $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$, 0<x<2.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{3}}{x-1}$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και $x=\sqrt{3}$.

20. Έστω συνάρτηση f: R → R συνεχής, F μια παράγουσα της f στο R και $F(x) = e^{x-F(x)}$, $x \in R$. Να δείξετε ότι:

α) Η $g(x) = \ln x + x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

β) $F(1) = 1$

γ) F κυρτή και βρείτε την εφαπτομένη στο $(1, F(1))$

δ) $4\int_0^1 xf(x)dx < 1$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{F(x)} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

στ) Υπάρχει $\alpha \in (0, 1)$: $e^{\alpha - F(\alpha)} = 1 - \alpha f(\alpha)$

21. Έστω μία συνάρτηση f: R → R με f(0)=0, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(x^2+1)f'(x) = e^{x-f(x)} - 2x, \text{ για κάθε } x \in R.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x - \ln(x^2+1)$.

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο α τέτοιο, ώστε στο διάστημα (α, α+1) η εξίσωση $f(x^4 + 3x) = f(5)$ να έχει ακριβώς μία ρίζα.

γ) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=1, να δείξετε ότι $\frac{1}{6} < E < \frac{1}{2}$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0, 1)$, ώστε $6\theta^{2017}\int_0^1 f(x)dx = 3 - 2\theta$.

22. Έστω f: (0, + ∞) →R, μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$(x^2 - x)f'(x) = x - f(x), \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ και να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $4(x-1)\int_1^2 f(x)dx = 2x^2 - 3$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1, 2).

δ) Αν α ένας θετικός αριθμός να δείξετε ότι $\int_\alpha^{\alpha^2} f(x)dx \le \frac{1}{\alpha}\int_\alpha^{\alpha^2} xf(x)dx$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και τις ασύμπτωτες της C_f.

γ) Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f.

δ) Αν x_1, x_2 οι θέσεις των σημείων καμπής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=x_1$ και $x=x_2$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα μονοτονίας του πεδίου ορισμού της.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα μονοτονίας της f.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 2x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την f(x)=α και στη συνέχεια ότι έχει, ακριβώς, τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in R$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=-\dfrac{1}{2}$ και $x=\dfrac{1}{2}$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$.

Α) Να βρείτε:

α) Το σύνολο τιμών της f.

β) Τις ασύμπτωτες της C_f.

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=2 και x=e.

26. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in R .$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = f(x) + x διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Β. Αν f(0)=1, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$, $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι f(x)>0 για κάθε $x \in R$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(\eta\mu f(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(\sqrt{2}-1)$.

27. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(0) = 0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) \geq xe^{2x}, \text{ για κάθε } x \in R .$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)}{x\eta\mu x}=1$

γ) Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα [0, 1].

28. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, με $f(0) = 1$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = 4f(x)+32x^2-16x , \text{ για κάθε } x \in R .$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{4x} - 8x^2$, $x \in R$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι $4f(2x) < 3f(x) + f(5x)$, για κάθε x (0, +∞).

δ) Να αποδείξετε ότι $(e^2-2)\ln 2 < \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}dt < (e^4-8)\ln 2$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}dt - (x-1)(3f(x)+f(5x)-4f(2x)) = (e^{4x}-2)\ln 4x$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}(x^3-x)$, $x \in R$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x΄x.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x\ln x-x}$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x}=\kappa$, $x>0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x \cdot f(x)dx = \frac{e-1}{e}$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(\xi_1)\cdot\ln\xi_1 + ef(\xi_2)\cdot\ln\xi_2 = \frac{e-e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$

31. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύουν $f'(1)=1$ και $f'(x)=2xe^{-f(x)}$ για κάθε $x \in R$.

α) Να βρεθεί ο τύπος και τα σημεία καμπής της f.

β) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{\alpha}-\alpha-1=\ln(x^2+1)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α, με $\alpha \in R$.

γ) Να αποδειχθεί ότι $0<\int_0^1 f(x)dx<\ell n2$

δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

ε) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (2015, 2016)$ τέτοιο ώστε $\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\ln\left(\frac{2016^2+1}{2015^2+1}\right)=e^{\ln 2}$

32. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει ότι $[f(x)]^2 - x\cdot f(x) + x^2 - 3 = 0$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=\alpha$, με $0<\alpha<2$, να αποδειχθεί ότι $f(\alpha)=2\alpha$ και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το α.

β) Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f, C_f, δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Αν επιπλέον η f'' είναι συνεχής στο R, τότε:

i) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x+1}{2}\right)+f\left(\frac{x-1}{2}\right)$ είναι αδύνατη.

ii) Να δειχθεί ότι η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^2 f(x)dx \le 4$

33. Δίνεται η συνάρτηση f: R→ R με $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι για κάθε x ∈ R ισχύει $\left(1+x^2\right)f''(x)+xf'(x)=0$

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 f(x)dx$

δ) Να δείξετε ότι:

i) $f(x) \le x$ για κάθε $x \ge 0$ ii) $\int_0^1 \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx < 2$

34. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \ge 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x + e^x) = f(\ln x + 2009)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[1, +\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^e f(x)dx+\int_\alpha^\beta f^{-1}(x)dx$ όπου $\alpha = 1 + e$, $\beta = e - 1 + e^e$.

35. Έστω η συνάρτηση f: R → R δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^3(x)+2f(x)=x$ για κάθε x ∈ R.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κυρτά, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο καμπής.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

δ) Αν $g(x)=\frac{f^{-1}(x)}{x^2}$, να βρείτε την ασύμπτωτη της Cg στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την Cg, την παραπάνω ασύμπτωτη και τις ευθείες x=1 και x=e.

36. Έστω συνάρτηση f:[1, 2] → R, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία δίνονται $f''(x)<0$, $x \in [1, 2]$, f(1)=0, f(2)=2, f΄(2)=1.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη κα να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία y = x εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f''(x_0)<-1$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$, $x \in (1, 2)$

ii) $f(x) \geq 2(x-1)$, $x \in [1, 2]$

iii) $\int_1^2 f(x)dx > 1$

ε) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: x + y = 2 τέμνει ακριβώς σε ένα μόνο σημείο τη γραφική παράσταση της f.

στ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 2)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\, f'(\xi_2) = f'(\xi_1) + 2$.

37. Αν f:(0, +∞) → R, g: R→ R παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε να ισχύουν $f(g(x))g(x)=x$, $x \in R$ και $f'(g(x))g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$ $x \in R$ με g(0)=1.

α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο A(1, g(1)) είναι η y=g(1)x.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ και ότι είναι κοίλη στο $(0, e\sqrt{e}]$ και η g κυρτή στο R.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράσταασης της f στο σημείο της με τετμημένη x=1.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f, g και των ευθειών x=1, x=ln3.

ε) Να δείξετε ότι $e^{\sqrt{6-2e}} > \ln 3$.

38. Έστω η συνάρτηση f: (0, +∞) → R, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $x^2 f''(x)+5xf'(x)+4f(x)=0$, για κάθε x >0, f(1)=1, f΄(1)=–3.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2 f(x)+\ln x$ με x>0 είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x>0$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

δ) Να δείξετε ότι αν $0<\alpha<\beta<2$ τότε $f(\beta)<\frac{\beta\ln\alpha-\alpha\ln\beta}{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}<f(\alpha)$

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y=0$, $x=1$, $x=e^2$.

39. Έστω συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to R$ κυρτή, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\int_0^1 \frac{f''(x)-f(x)}{e^x}dx=\frac{f'(1)+f(1)-e}{e}$

α) Να αποδείξετε ότι η $f'(0)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x)>1$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1)=2$, να δείξετε ότι $1<\int_0^1 f(x)dx<\frac{3}{2}$

40. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0, +\infty) \to R$, για την οποία ισχύουν $f(1)=1$ και $x^2(f'(x)-1)=\ln x-1$ για κάθε $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\frac{\ln x}{x}$, $x>0$ ισούται με την ταυτοτική στο $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $x^{\frac{1}{x+1}} \geq e^{1-x}$, όταν $x \geq 1$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.