ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{Ο}}$: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

§ 1.1, 1.2, 1.3: ΠΡΟΣΘΕΣΗ & ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ - ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΘΕΜΑ Β1_18603

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ και Ε του επιπέδου τέτοια, ώστε:

$$\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{A\Gamma}\ .$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Με σημείο αναφοράς το Α έχουμε:

$$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{A\Delta} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma} - (2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}) =$$
$$= 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma} - 2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{A\Gamma} =$$
$$= 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{A\Gamma} \qquad (1)$$

Θυμίζουμε ότι: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

β) Είναι $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} \quad (2)$

📖 $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\Re$, $\vec{\beta}\neq\vec{0}$

Από (α) έχουμε: $\overrightarrow{\Delta E} = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{A\Gamma} = -3(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}) \overset{(2)}{=} -3\overrightarrow{B\Gamma}$.

Άρα $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$

ΘΕΜΑ Β2_20054

Θεωρούμε τα σημεία Ρ, Λ, Κ και Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση

$$5\overrightarrow{P\Lambda}=2\overrightarrow{PK}+3\overrightarrow{PM}$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία Κ, Λ και Μ να δείξετε ότι ισχύει

$$2\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{B\Lambda}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$$

όπου Α και Β είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $5\overrightarrow{P\Lambda}=2\overrightarrow{PK}+3\overrightarrow{PM}$ Θεωρώ σημείο αναφοράς το Κ. Οπότε:

$$5\left(\overrightarrow{K\Lambda}-\overrightarrow{KP}\right)=-2\overrightarrow{KP}+3\left(\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KP}\right)\Leftrightarrow 5\overrightarrow{K\Lambda}-5\overrightarrow{KP}=-2\overrightarrow{KP}+3\overrightarrow{KM}-3\overrightarrow{KP} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{K\Lambda}=3\overrightarrow{KM}\Leftrightarrow \overrightarrow{K\Lambda}=\frac{3}{5}\overrightarrow{KM}$$

Οπότε $\overrightarrow{K\Lambda}//\overrightarrow{KM}$, άρα τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

β) $2\overrightarrow{A\Lambda}+3\overrightarrow{B\Lambda}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$ Θεωρώ σημείο αναφοράς το Ρ. Οπότε:

$$2\left(\overrightarrow{P\Lambda}-\overrightarrow{PA}\right)+3\left(\overrightarrow{P\Lambda}-\overrightarrow{PB}\right)+2\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PM}\right)=\overrightarrow{PK}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PK}-\overrightarrow{PB}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{P\Lambda}-2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{P\Lambda}-3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PK}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PK}-\overrightarrow{PB}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{P\Lambda}=2\overrightarrow{PK}+3\overrightarrow{PM}$$ που ισχύει από ερώτημα (α)

ΘΕΜΑ Β3_22518

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο Ο. Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$,

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}-\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}\right)=-\vec{\alpha}+3\vec{\beta}+4\vec{\gamma}-\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-5\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$$

και $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}=3\vec{\alpha}+\vec{\beta}+6\vec{\gamma}-\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-5\vec{\gamma}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

β) Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB}=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=-\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=-\overrightarrow{A\Gamma}$, οπότε $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$.

Άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Β4_18604

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε , Ζ σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{AZ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξτε ότι τα σημεία Β , Ζ και Ε είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Με σημείο αναφοράς το Α έχουμε:

$$\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AE}=\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma}-\frac{2}{5}\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)-\frac{2}{5}\overrightarrow{A\Delta}=$$

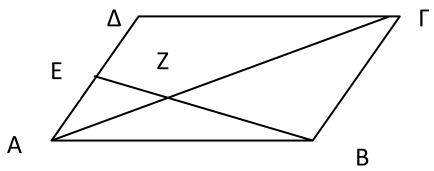
$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Delta}-\frac{2}{5}\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{35}\overrightarrow{A\Delta}\quad(1)$$

$$\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}\right)=$$

$$=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Delta}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Delta}\quad(2)$$

β) Είναι $\overrightarrow{ZB}\overset{(2)}{=}\frac{5}{2}\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{35}\overrightarrow{A\Delta}\right)\overset{(1)}{=}\frac{5}{2}\overrightarrow{EZ}$

Άρα $\overrightarrow{ZB}\parallel\overrightarrow{EZ}$ και επειδή έχουν κοινό σημείο το Ζ τα σημεία Β, Ζ και Ε είναι συνευθειακά.



📖 Μεθοδολογία

Για να δείξουμε ότι τρία σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δύο διανύσματα με άκρα αυτά τα σημεία, π.χ. $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AB}$ είναι συγγραμμικά ($\overrightarrow{A\Gamma}\parallel\overrightarrow{AB}$).

Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB},\ \lambda\in\Re.$$

Πράγματι, αν $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{A\Gamma}$ θα έχουν κοινό φορέα, άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

§ 1.4: ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΘΕΜΑ Β5_18605

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB}=3\vec{i}+\vec{j}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{i}-5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Α , Β και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\vec{i}+\vec{j}-\left(2\vec{i}+4\vec{j}\right)=\vec{i}-3\vec{j}$

Άρα $\overrightarrow{AB}=(1,-3)$

(ή $\overrightarrow{OA}=(2,4)$, $\overrightarrow{OB}=(3,1)$, οπότε:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,1)-(2,4)=(1,-3)$)

$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=5\vec{i}-5\vec{j}-\left(3\vec{i}+\vec{j}\right)=2\vec{i}-6\vec{j}$

Άρα $\overrightarrow{B\Gamma}=(2,-6)$

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,\psi_2)$ ισχύει:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix}=0$$

β) Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=-6-(-6)=0$

Άρα $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}$. Άρα τα σημεία Α, Β,Γ είναι συνευθειακά και επομένως δεν μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

ΘΕΜΑ Β6_20148

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{\beta}=2\vec{i}-5\vec{j}$ και $\vec{\gamma}=(7,3)$

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο.

(Μονάδες 10)

β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

Λύση

Έχουμε: $\vec{\alpha}=\vec{i}-2\vec{j}=(1,-2)$ και $\vec{\beta}=2\vec{i}-5\vec{j}=(2,-5)$

α) Έχουμε $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-5+4=-1\neq 0$ Άρα $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$

$\det\left(\vec{\alpha},\vec{\gamma}\right)=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=3+14=17\neq 0$ Άρα $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\gamma}$

$\det\left(\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=6+35=41\neq 0$ Άρα $\vec{\beta} \nparallel \vec{\gamma}$

β) Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, αν και μόνο αν, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ, τέτοιοι ώστε: $\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ λ, μ $\in \Re$.

Έχουμε:

$$\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (7,3)=\lambda(1,-2)+\mu(2,-5) \Leftrightarrow (7,3)=(\lambda+2\mu,-2\lambda-5\mu)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+2\mu=7 \\ -2\lambda-5\mu=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=41 \\ \mu=-17 \end{cases}$$

Άρα $\vec{\gamma}=41\cdot\vec{\alpha}-17\cdot\vec{\beta}$ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ Β7_20055

Θεωρούμε τα σημεία Α(α+1, 3), Β(α, 4) και Γ(–4, 5α+4), α$\in$ R .

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α, τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

γ) Αν α=1, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(\alpha-\alpha-1,4-3)=(-1,1)$

$\overrightarrow{B\Gamma}=(-4-\alpha,5\alpha+4-4)=(-4-\alpha,5\alpha)$

β) $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4-\alpha & 5\alpha \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -5\alpha-(-4-\alpha)=0 \Leftrightarrow -5\alpha+4+\alpha=0$

$\Leftrightarrow$ -4α = -4 $\Leftrightarrow$ α = 1

γ) Για α=1 είναι:

Α(2,3), Β(1,4), Γ(–4, 9) και $\overrightarrow{AB}=(1-2,4-3)=(-1,1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-4-2,9-3)=(-6,6)$.

Άρα $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (-6,6)=\lambda(-1,1) \Leftrightarrow (-6,6)=(-\lambda,\lambda) \begin{cases} -6=-\lambda \\ 6=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=6$.

ΘΕΜΑ Β8_20071

Θεωρούμε τα σημεία Α(1+2α, 4α–2) και Β(5α+1, –α), α$\in Z$.

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{AB}|$=10.

(Μονάδες 12)

β) Έστω α=2. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(3\alpha,-5\alpha+2)$

$|\overrightarrow{AB}|=10 \Leftrightarrow \sqrt{(3\alpha)^2+(-5\alpha+2)^2}=10$ και λύνοντας ως προς α βρίσκουμε α =2.

β) Για α=2 είναι Α(5, 6) και Β(11, -2). Έστω Μ(x, 0).

Πρέπει (ΜΑ) =(ΜΒ) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2+(0-6)^2}=\sqrt{(x-11)^2+(0-2)^2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x=\dfrac{16}{3}$

Άρα $M\left(\dfrac{16}{3},0\right)$

ΘΕΜΑ Β9_20061

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4,3) και Δ(2,3).

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β.

(Μονάδες 16)

Λύση

Έχουμε:

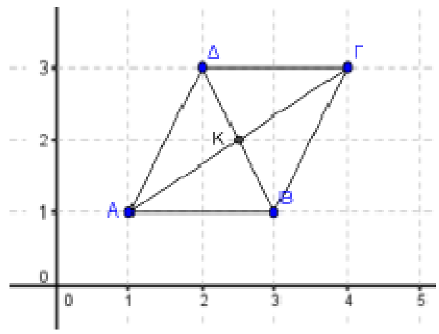
$\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A, y_\Delta-y_A)=(2-1,3-1)=(1,2)$

άρα και $\overrightarrow{B\Gamma}=(1,2)$, αφού ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο.

Επίσης,

$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta, y_\Gamma-y_\Delta)=(4-2,3-3)=(2,0)$

άρα και $\overrightarrow{AB}=(2,0)$.



α) Τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι τα μέτρα των διανυσμάτων. Έχουμε λοιπόν:

$$(AB)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+0^2}=\sqrt{4}=2=(\Delta\Gamma) \quad \text{και}$$

$$(A\Delta)=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}=(B\Gamma)$$

β) Επειδή οι διαγώνιοι του παραλληλόγραμμου ΒΔ, ΑΓ διχοτομούνται, το Κ είναι μέσο του ΑΓ.

Οπότε: $x_K=\dfrac{x_A+x_\Gamma}{2}=\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2}$ και $y_K=\dfrac{y_A+y_\Gamma}{2}=\dfrac{1+3}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

Άρα $K\left(\dfrac{5}{2},2\right)$

Το Κ είναι μέσο και της ΒΔ οπότε για τον υπολογισμό της κορυφής Β έχουμε:

$$\begin{cases} x_K=\dfrac{x_B+x_\Delta}{2} \\ y_K=\dfrac{y_B+y_\Delta}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \dfrac{5}{2}=\dfrac{x_B+2}{2} \\ 2=\dfrac{y_B+3}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=x_B+2 \\ 4=y_B+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=3 \\ y_B=1 \end{cases}$$

Άρα Β(3, 1)

§ 1.5: ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Β10_18556

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\vec{\beta}$. (Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του κ. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. (Μονάδες 7)

Λύση

α) $\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=2$

β) Αφού είναι κάθετα έχουμε:

$\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\kappa\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0$

$\Leftrightarrow 2\kappa|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=0$

$\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow} 2\kappa 2+2\cdot 2+\kappa\cdot 2+8=0$

$\Leftrightarrow 4\kappa+4+2\kappa+8=0\Leftrightarrow 6\kappa=-12\Leftrightarrow\kappa=-2$

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\vec{\beta}=0$

γ) $\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=4\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0$

$=4|\vec{\alpha}|^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=4\cdot 2+4\cdot 2+8=24$

Άρα $\left|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Όταν ζητείται το $|\vec{v}|$, βρίσκουμε πρώτα το $|\vec{v}|^2$. Θυμίζουμε $|\vec{v}|^2=\vec{v}^2$

ΘΕΜΑ Β11_18581

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta}=2$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $2|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$.

Έχουμε: $\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 60^\circ=4\cdot\frac{1}{2}=2$.

β) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2\cdot 2+|\vec{\beta}|^2=2+4+8=14$

Άρα $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{14}$

$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=2-2\cdot 2+8=6$

Άρα $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{6}$

ΘΕΜΑ Β12_18558

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB}=(-4,-6)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2,-8)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει Α(3,1), να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\frac{1}{2}[(-4,-6)+(2,-8)]=\frac{1}{2}(-4+2,-6+(-8))$

$=\frac{1}{2}(-2,-14)=(-1,-7)$.

> Αν Μ μέσο του ΑΒ τότε: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

β) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=-4\cdot 2+(-6)(-8)=-8+48=40$ (1)

Όμως $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)\Leftrightarrow \text{συν}A=\frac{40}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|}>0$

> Αν $\vec{\alpha}=(x,\psi)$ τότε: $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+\psi^2}$

Άρα η γωνία $\widehat{A}$ είναι οξεία.

γ) Είναι $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,\psi_B-\psi_A)$

$\Leftrightarrow(-4,-6)=(x_B-3,\ \psi_B-1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-3=-4\Leftrightarrow x_B=-1\\ \psi_B-1=-6\Leftrightarrow\psi_B=-5\end{cases}$. Άρα Β (-1, -5)

ΘΕΜΑ Β13_18598

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(\kappa^2-6\kappa+9,\kappa-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,6)$ όπου $\kappa\in\Re$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για κ =1 να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=(\kappa^2-6\kappa+9)\cdot 1+(\kappa-3)\cdot 6=\kappa^2-6\kappa+9+6\kappa-18=\kappa^2-9$

β) Για να είναι $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\kappa^2-9=0\Leftrightarrow\kappa=3$ ή κ=-3

γ) Για κ=1 είναι $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$, οπότε:

$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(1,6)-(4,-2)=(-3,8)$

ΘΕΜΑ Β14_20053

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|=4$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-8$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta}+2\vec{\alpha}=\vec{0}$

(Μονάδες 15)

Λύση

α) συν$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\dfrac{-8}{2\cdot 4}=-1$. Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=180^\circ$.

β) $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ οπότε $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ με λ<0, οπότε $|\vec{\alpha}|=|\lambda||\vec{\beta}| \Leftrightarrow 2=|\lambda|\cdot 4 \Leftrightarrow |\lambda|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2}$ (αφού λ<0).

Άρα $\vec{\alpha}=-\dfrac{1}{2}\vec{\beta}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}=-\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\beta}+2\vec{\alpha}=\vec{0}$

ΘΕΜΑ Β15_20050

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,7)$ και $\vec{\beta}=(2,4)$.

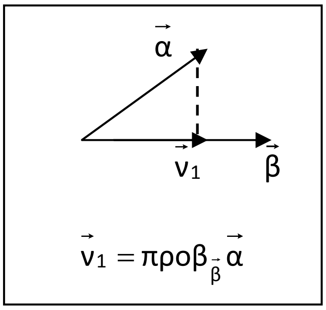
α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

Λύση



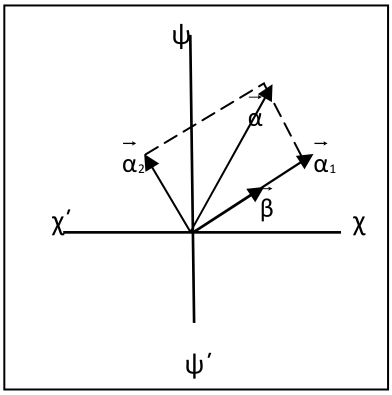
α) Είναι $\vec{\beta}\vec{\alpha}=\vec{\beta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ (1)

Όμως $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ (2), γιατί $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$

Η (1) γίνεται: $\vec{\beta}\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}^2$, $\vec{\beta}^2=|\vec{\beta}|^2=\left(\sqrt{2^2+4^2}\right)^2=20$.

Οπότε: $2\cdot 1+4\cdot 7=\lambda\cdot 20\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{3}{2}$

Από (2) έχουμε: $\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\dfrac{3}{2}(2,4)=(3,6)$



β) Έχουμε: $\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ (3) και $\vec{\alpha}_1\perp\vec{\alpha}_2$

Είναι $\vec{\alpha}_1=\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=(3,6)$ (από (α) ερώτημα)

Από (3): $\overrightarrow{\alpha_2}=\vec{\alpha}-\overrightarrow{\alpha_1}=(1,7)-(3,6)=(-2,1)$

ΘΕΜΑ Β16_20052

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\vec{\beta}=7$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-1$

α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2=1$

$(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\vec{\beta}=7 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\beta}^2=7 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|=2$

β) $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=...=13$. Άρα $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{13}$.

γ) Έστω $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=\vec{v}$

Είναι: $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{v}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\beta}$. Οπότε $\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\beta}^2=\lambda\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{7}{4}$

Άρα $\vec{v}=\frac{7}{4}\vec{\beta}$.

ΘΕΜΑ Β17_20056

Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δυο διανύσματα με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{u}$.

(Μονάδες 16)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

(Μονάδες 9)

Απάντηση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\sqrt{6}$ και $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=4-\sqrt{6}$

β) $|\vec{u}|=2\sqrt{3-\sqrt{6}}$

ΘΕΜΑ Β18_20057

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης

$$\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\beta})$$

(Μονάδες 10)

β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}+\overrightarrow{2\alpha}$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$, $\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot(2\vec{\beta})=3$

β) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}-2\vec{\beta},\ \vec{\beta}+2\vec{\alpha}}\right)=\dfrac{(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})}{|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}||\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|}$ (1)

$(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(\vec{\beta}+2\vec{\alpha})=\ldots=-9$

$|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=\sqrt{13}$ και $|\vec{\beta}+2\vec{\alpha}|=2\sqrt{3}$

Από (1) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}-2\vec{\beta},\ \vec{\beta}+2\vec{\alpha}}\right)=\dfrac{-9\sqrt{39}}{78}=-\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$

Θυμίζουμε ότι:

$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\dfrac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}||\vec{\delta_2}|}$

ΘΕΜΑ Β19_20058

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,\sqrt{3})$ και $\vec{\beta}=(\sqrt{3},3)$. Να βρείτε:

α) τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ (Μονάδες 10)

β) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\cdot\vec{\alpha}$

(Μονάδες 15)

Απάντηση

α) $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{3}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\sqrt{3}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$. Άρα $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

β) $\vec{u}=(12+4\sqrt{3},12-12\sqrt{3})$

ΘΕΜΑ Β20_20059

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}=(x^2,x-1)$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 15)

Απάντηση

α) $\vec{u}=(3,4)$

β) Πρέπει $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Β21_20070

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δυο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν

$$3|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=9,\ 2|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|=1 \quad \text{και} \quad \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\pi}{3}$$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

Απάντηση

α) Λύνουμε το (Σ) και βρίσκουμε $|\vec{\alpha}|=2$ και $|\vec{\beta}|=3$. Από ορισμό $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3$.

β) $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=\sqrt{61}$

ΘΕΜΑ Β22_20069

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση

α) Εργαζόμαστε όπως στο Β15 και βρίσκουμε $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$

β) $\overrightarrow{\alpha_1}=\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ και $\overrightarrow{\alpha_2}=\left(\frac{8}{5},\frac{-16}{5}\right)$

ΘΕΜΑ Β23_22505

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}-3\vec{v}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u}-3\vec{v}|=14$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Έχουμε:

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})\cdot(5\vec{\alpha}-4\vec{\beta})=0\Leftrightarrow5\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+10\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-8\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow6\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=3\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$$

β) Έχουμε:

$$\left|\vec{u}-3\vec{v}\right|^2=\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-6\vec{u}\vec{v}+9\vec{v}^2=\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)^2-6\cdot 0+9\left(5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\right)^2=\ldots=196$$

Οπότε $\left|\vec{u}-3\vec{v}\right|=\sqrt{196}=14$

Επίσης,

$$\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\ldots=1$$

Άρα $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{1}=1$

Επίσης,

$$\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\ldots=-14\cdot 1=-14$$

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{u}-3\vec{v},\vec{\alpha}-\vec{\beta}}\right)=\frac{\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)}{\left|\vec{u}-3\vec{v}\right|\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|}=\frac{-14}{14\cdot 1}=\frac{-14}{14}=-1$$

Επομένως

$$\left(\widehat{\vec{u}-3\vec{v},\vec{\alpha}-\vec{\beta}}\right)=180^\circ \text{ ή } \pi \text{ rad και } \left(\vec{u}-3\vec{v}\right)\uparrow\downarrow\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$$

ΘΕΜΑ Β24_22519

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα για τα οποία ισχύουν:

$\vec{\beta}=\left(\frac{1}{7},1\right)$ και $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}=(\mu+2,7-2\mu)$, $\mu \in \Re$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ.

(Μονάδες 10)

β) Αν μ=2, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Έχουμε:

$$\vec{\alpha}+7\vec{\beta}=(\mu+2,7-2\mu)\Leftrightarrow\vec{\alpha}+7\left(\frac{1}{7},1\right)=(\mu+2,7-2\mu)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\vec{\alpha}=(\mu+1,-2\mu)$$

β) i) Αν μ=2, τότε έχουμε: $\vec{\alpha}=(\mu+1,-2\mu)=(3,-4)$ και $\vec{\alpha}+7\vec{\beta}=(\mu+2,7-2\mu)=(2+2,7-2\cdot 2)=(4,3)$

Για να δείξουμε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\alpha}+7\vec{\beta}$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+7\vec{\beta}\right)=0$.

Οπότε

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+7\vec{\beta}\right)=(3,-4)(4,3)=0$$

ii) Για να βρούμε τη γωνία των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(3,-4)\cdot\left(\frac{1}{7},1\right)=\ldots=-\frac{25}{7}$$

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5 \quad \text{και}$$

$$|\vec{\beta}|=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{49}+1}=\frac{5\sqrt{2}}{7}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\Leftrightarrow -\frac{25}{7}=5\frac{5\sqrt{2}}{7}\cdot\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι $\frac{3\pi}{4}$

ΘΕΜΑ Β25_22524

Έστω $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-5,1)$ δύο διανύσματα.

α) Να βρείτε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ και να υπολογίσετε την παράσταση $\dfrac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}}$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot(-5)+(-3)\cdot 1=-13$

Είναι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{(-5)^2+1^2}=\sqrt{2}\sqrt{13}$

Επομένως η παράσταση γίνεται

$$\frac{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{2}\sqrt{13}}{\sqrt{-(-13)}}=1+\sqrt{2}$$

β) Είναι $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=2\cdot(2,-3)-3(-5,1)=(19,-9)$

Επομένως $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=\sqrt{19^2+(-9)^2}=\sqrt{361+81}=\sqrt{442}$

<u>β΄ τρόπος:</u>

Έχουμε: $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|^2=(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta})^2=(2\vec{\alpha})^2-2\cdot 2\vec{\alpha}\cdot 3\vec{\beta}+(3\vec{\beta})^2=4|\vec{\alpha}|^2-12\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+9|\vec{\beta}|^2=\ldots=442$

Επομένως είναι $|2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=\sqrt{442}$

ΘΕΜΑ Β26_22527

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2$$

(Μονάδες 12)

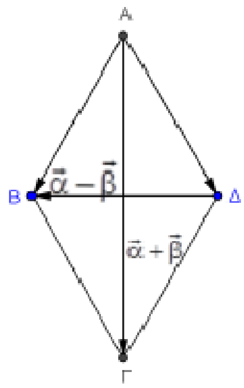
β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Βλέπε σχολικό βιβλίο, σελ. 48 άσκηση 2.

β) Από υπόθεση έχουμε: $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{\alpha}|=1$ και $|\overrightarrow{A\Delta}|=|\vec{\beta}|=1$



Είναι γνωστό (κανόνας παραλληλογράμμου) ότι:

$\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\Delta B}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

οπότε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ θα είναι το $|\overrightarrow{\Delta B}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

Από ερώτημα (α) ισχύει ότι:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\beta}|^2$ ή

$|\overrightarrow{A\Gamma}|^2+|\overrightarrow{B\Delta}|^2=2|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{A\Delta}|^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2+|\overrightarrow{B\Delta}|^2=2\cdot 1^2+2\cdot 1^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow |\overrightarrow{B\Delta}|=1$

ΘΕΜΑ Β27_22530

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε $\overrightarrow{AB}=(-1,4)$, και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έχουμε $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-18\neq 0$

Οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα και επομένως τα τρία σημεία Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|}=\frac{21}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{45}}>0$$

Άρα η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία.

β) Είναι γνωστό ότι: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma})$ οπότε:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}((-1,4)+(3,6))=(1,5) \text{ και } |\overrightarrow{AM}|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{o}: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1_22561

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A\Delta}=\vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ την ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{A\Delta}$ και $\vec{AZ}=\frac{1}{4}\vec{A\Gamma}$.

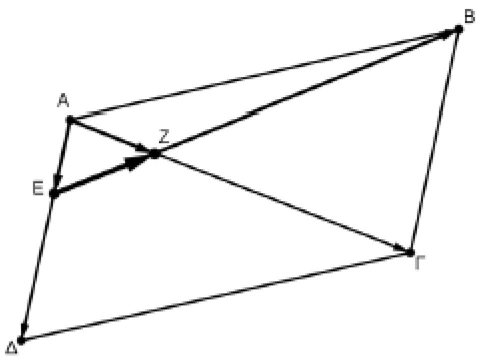
Να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{AZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$ (Μονάδες 8)

β) $\vec{EZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το $\vec{EB}$. (Μονάδες 12)

γ) Τα σημεία Ε, Ζ, Β είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)

Λύση



α) Αφού $\vec{AZ}=\frac{1}{4}\vec{A\Gamma}=\frac{1}{4}\left(\vec{AB}+\vec{A\Delta}\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$

β) Είναι $\vec{EZ}=\vec{AZ}-\vec{AE}=\frac{1}{4}\vec{A\Gamma}-\frac{1}{3}\vec{A\Delta}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$

Ακόμη $\vec{EB}=\vec{AB}-\vec{AE}=\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}$

γ) Έχουμε $\vec{EZ}=\frac{1}{4}\left(\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}\right)=\frac{1}{4}\vec{EB}$

άρα $\vec{EB}\uparrow\uparrow\vec{EZ}$ δηλαδή Ε, Β, Ζ συνευθειακά.

ΘΕΜΑ Δ2_18616

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\left|\vec{\alpha}\right|=2,\ \left|\vec{\beta}\right|=1,\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=60^\circ \text{ και } \vec{\gamma}=\frac{\kappa}{2}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta},\ \text{όπου } \kappa\in\Re.$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ (Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: κ = −2 (Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\sigma\upsilon\nu 60^\circ=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$

β) i) $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=\kappa\Leftrightarrow\vec{\beta}\cdot\left(\frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\kappa\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\beta}^2=\kappa$

$$\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}\cdot 1-\left|\vec{\beta}\right|^2=\kappa\Leftrightarrow\frac{\kappa}{2}-1=\kappa\Leftrightarrow\kappa-2=2\kappa\Leftrightarrow\kappa=-2$$

ii) Για κ= –2 είναι $\vec{\gamma} = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, οπότε:

$$|\vec{\gamma}|^2 = |-\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} =$$

$= 4+1+2=7$. Άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{7}$

iii) Αρκεί να δείξουμε ότι: $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma})(\vec{\beta} - \vec{\gamma}) = 0$.

Έχουμε:

$$\left[3\vec{\alpha} + 2(-\vec{\alpha} - \vec{\beta})\right]\left[\vec{\beta} - (-\vec{\alpha} - \vec{\beta})\right] = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$$

$$= \vec{\alpha}^2 - 4\vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 4|\vec{\beta}|^2 = 4 - 4 \cdot 1 = 0$$

ΘΕΜΑ Δ3_18618

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = \big||\vec{u}| - |\vec{v}|\big|$.

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{3} = \dfrac{|\vec{\beta}|}{4} = \dfrac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ (Μονάδες 7)

Λύση

α) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \big||\vec{u}| - |\vec{v}|\big| \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$

Υπόδειξη: υψώνουμε τα δύο μέλη της ισότητας στο τετράγωνο, βλ. σχολ. βιβλ. σελ, 48, ασκ. 15

β) i) Έχουμε: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ (1) και $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{3} = \dfrac{|\vec{\beta}|}{4} = \dfrac{|\vec{\gamma}|}{7} = \lambda$ (λ>0) Άρα: $|\vec{\alpha}| = 3\lambda$, $|\vec{\beta}| = 4\lambda$, $|\vec{\gamma}| = 7\lambda$.

- Από (1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$ άρα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |-\vec{\gamma}| = |\vec{\gamma}| = 7\lambda$ (2)

  Επίσης $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 3\lambda + 4\lambda = 7\lambda$ (3)

  Από (2) και (3) $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, οπότε από (α) ερώτημα $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

- Από (1) $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = -\vec{\alpha}$ άρα $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = |-\vec{\alpha}| = |\vec{\alpha}| = 3\lambda$ (4)

  Επίσης $\big||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}|\big| = |4\lambda - 7\lambda| = |-3\lambda| = 3\lambda$ (λ>0) (5)

  Από (4) και (5) $|\vec{\beta} + \vec{\gamma}| = \big||\vec{\beta}| - |\vec{\gamma}|\big|$, οπότε από (α) ερώτημα $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$

ii) Αφού $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$, άρα $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}$ δηλ. $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\gamma}$, κ<0.

Όμως $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{3} = \dfrac{|\vec{\gamma}|}{7} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = \dfrac{3}{7}|\vec{\gamma}|$. Άρα $|\kappa| = \dfrac{3}{7} \Leftrightarrow \kappa = -\dfrac{3}{7}$ (αφού κ<0).

Άρα $\vec{\alpha} = -\dfrac{3}{7}\vec{\gamma} \Leftrightarrow 7\vec{\alpha} = -3\vec{\gamma} = \Leftrightarrow 7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

ΘΕΜΑ Δ4_18609

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda-1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right)$.

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \frac{1}{2}\left[(\lambda, \lambda+1) + (3\lambda, \lambda-1)\right] = \frac{1}{2}(4\lambda, 2\lambda) = (2\lambda, \lambda)$

β) Θα πρέπει $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow (2\lambda, \lambda) \cdot \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda\right) = 0 \Leftrightarrow 4 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$ (απορρίπτεται)

Άρα λ=2.

γ) Για λ=2 είναι: $\overrightarrow{AB} = (2,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (6,1)$

$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|$. Είναι $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 18 = -16$

Άρα $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|-16| = 8$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ5_18606

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = (4, -2)$ και $\overrightarrow{OB} = (1,2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν Γ (α,β) είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β , τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB} = (-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (\alpha-4, \beta+2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 0$ Άρα $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

β) i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,2) - (4,-2) = (-3,4)$

$\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma} - \overrightarrow{OA} = (\alpha,\beta) - (4,-2) = (\alpha-4, \beta+2)$

ii) Αφού το Γ είναι σημείο της ευθείας ΑΒ, άρα τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Άρα: $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \alpha-4 & \beta+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(\beta+2) - 4(\alpha-4) = 0$

$\Leftrightarrow -3\beta - 6 - 4\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta = 10$ (1)

iii) $\overrightarrow{O\Gamma} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)(-3,4) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha + 4\beta = 0$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha = \frac{8}{5}$ και $\beta = \frac{6}{5}$.

Άρα $\Gamma\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΘΕΜΑ Β

§ 2.1 - 2.2: ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ - ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Β1_18575

Δίνονται τα σημεία Α(1,2) και Β(5,6) .
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ έχει εξίσωση την $\psi = -\chi + 7$

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $\lambda_{AB} = \dfrac{6-2}{5-1} = 1$ Άρα $\Psi - 2 = 1(\chi - 1) \Leftrightarrow \psi = \chi + 1$

β) Αν Μ μέσο ΑΒ, τότε: $\chi_M = \dfrac{1+5}{2} = 3$, $\psi_M = \dfrac{2+6}{2} = 4$

Άρα Μ(3, 4), $\lambda_{\mu\varepsilon\sigma}=-1$. Άρα: $\psi - 4 = -1(\chi - 3) \Leftrightarrow \psi = -\chi + 7$.

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $A(\chi_0,\psi_0)$ και έχει κλίση λ είναι:
$\psi-\psi_0=\lambda(\chi-\chi_0)$

ΘΕΜΑ Β2_20066

Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3,1), Β(–1, 1) και Γ(2, 4).
α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ.

(Μονάδες 18)

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΓ είναι

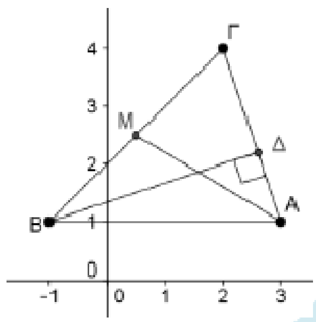
$\lambda = \dfrac{4-1}{2-3} = -3$

Άρα η εξίσωση της ΑΓ είναι $y - 1 = -3(x-3) \Leftrightarrow y = -3x + 10$

β) Επειδή ΒΔ ⊥ ΑΓ είναι $\lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} = \dfrac{1}{3}$

Άρα η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι:

$y - 1 = \dfrac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$



Οι συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ είναι $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

Οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ είναι: $\lambda = -\dfrac{3}{5}$

Άρα η εξίσωση της ΑΜ είναι $y - 1 = -\dfrac{3}{5}(x-3) \Leftrightarrow 3x + 5y - 14 = 0$

ΘΕΜΑ Β3_20072

Θεωρούμε μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α(6, –1) εκτός της (ε). Έστω Μ(2, 1) η προβολή του Α στην (ε).

Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 13)

β) Το συμμετρικό του Α ως προς την (ε).

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Αρχικά έχουμε $\lambda_{AM} = -\frac{1}{2}$

Εφόσον το Μ είναι η προβολή του Α στην (ε) η ΑΜ θα είναι κάθετη στην (ε) και θα ισχύει ότι

$$AM \perp (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_{AM} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 2$$

Η εξίσωση της (ε) είναι: y – 1 = 2(x–2) $\Leftrightarrow$ y – 1=2x – 4 $\Leftrightarrow$ y=2x – 3

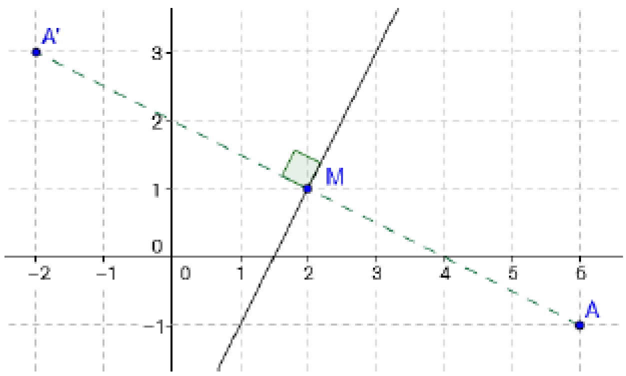
β) Έστω Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς την (ε). Το σημείο Μ θα είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΑ΄.

Οπότε:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{6 + x_{A'}}{2} \Leftrightarrow x_{A'} = -2$$

και

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-1 + y_{A'}}{2} \Leftrightarrow y_{A'} = 3$$



Άρα το συμμετρικό του Α ως προς την (ε) είναι το Α΄ (–2, 3)

ΘΕΜΑ Β4_20073

Δίνονται τα σημεία Α(2, 3), Β(–1, 5) και Γ(–2, –4).

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του Β ως προς το μέσο Μ της ΑΓ.

(Μονάδες 10)

γ) Τι σχήμα είναι το ΑΒΓΔ; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

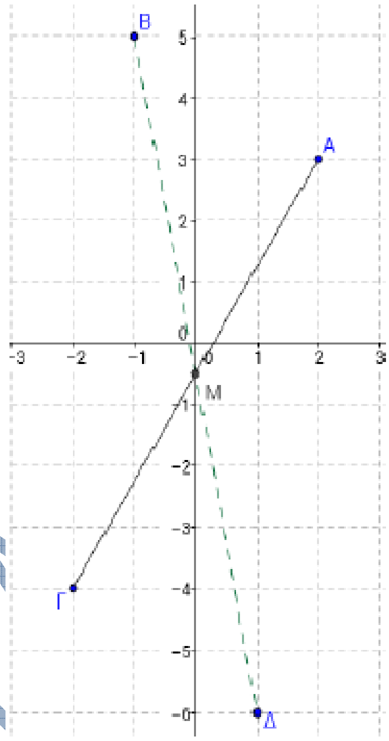
(Μονάδες 7)

Λύση

α) Έχουμε $\overrightarrow{AB} = (-3,2)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (-1,-9)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = -3(-9) - 2(-1) = 27 + 2 = 29 \neq 0$$

Οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι μη συγγραμμικά, δηλαδή τα Α, Β, Γ είναι μη συνευθειακά, άρα σχηματίζουν κορυφές τριγώνου.



β) Το σημείο Μ είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

Έτσι έχουμε:

$$x_M = \frac{2-2}{2} = 0 \quad \text{και} \quad y_M = \frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2}$$

Άρα έχουμε το μέσο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ της ΑΓ.

Το σημείο Μ θα είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ.

Έτσι έχουμε:

$$x_M = \frac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = 1$$

και

$$y_M = \frac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta = -6$$

Οπότε το συμμετρικό του σημείου Β ως προς το Μ είναι το Δ(1, –6)

γ) Παρατηρούμε ότι το σημείο Μ διχοτομεί τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ, οπότε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ Β5_18584

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : \chi - 2\psi - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2\chi - 4\psi + 10 = 0$ και το σημείο Α της ε_1 που έχει τετμημένη το 4 .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1.

(Μονάδες 10)

γ) Αν Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του Β .

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Για χ=4 στην (ε_1) $4 - 2\psi - 8 = 0 \Leftrightarrow \psi = -2$, άρα Α(4, –2)

β) Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = \frac{1}{2}$, άρα $\lambda_\varepsilon = -2$

Άρα: $\psi + 2 = -2(\chi - 4) \Leftrightarrow \psi = -2\chi + 6$, η εξίσωση της (ε)

Θυμίζουμε:
$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

γ) Λύνουμε το (Σ) των $\begin{cases} \psi = -2\chi + 6 \\ 2\chi - 4\psi + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \frac{7}{5} \\ \psi = \frac{16}{5} \end{cases}$

Άρα $B\left(\frac{7}{5}, \frac{16}{5}\right)$

ΘΕΜΑ Β6_18587

Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: χ − 8ψ+16 = 0 και $ε_2$:2χ +ψ+15 = 0 οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.
Αν οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνουν τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:
α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Α και Β

(Μονάδες 10)

β) αν Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ , να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{ΜΚ}$

(Μονάδες 15)

Απάντηση

α) Είναι Μ(−8, 1), Α(0, 2), Β(0, 15)

β) Είναι $Κ\left(0,-\frac{13}{2}\right)$, $\overrightarrow{ΜΚ}=\left(8,\frac{-15}{2}\right)$. Οπότε $λ_{\overrightarrow{ΜΚ}}=-\frac{15}{16}$

ΘΕΜΑ Β7_18589

Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: 8χ +ψ−28 = 0 και $ε_2$: χ −ψ+1 = 0 οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Μ και είναι κάθετη στον άξονα χ΄χ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: λχ −ψ− 3λ + 4 = 0 , όπου $λ\in\Re$.

(Μονάδες 15)

Απάντηση

α) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των $ε_1$ και $ε_2$ και είναι Μ(3, 4). Η ευθεία είναι η χ=3.

β) Είναι $ψ-4=λ(χ-3)\Leftrightarrow λχ-ψ-3λ+4=0$

ΘΕΜΑ Β8_18592

Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: χ − 3ψ+ 5 = 0 και $ε_2$: 3χ +ψ− 5 = 0
α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων.

(Μονάδες 7)

Απάντηση

α) $λ_{ε_1}=\frac{1}{3}$, $λ_{ε_2}=-3$. Άρα $λ_{ε_1}\cdot λ_{ε_2}=-1$.

β) Λύνουμε το (Σ) των εξισώσεων των $ε_1$ και $ε_2$ και βρίσκουμε Α(1, 2).
γ) Αφού διέρχεται από το Ο(0, 0) είναι της μορφής ψ=λχ,
όπου $λ=\frac{2}{1}=2$ άρα είναι ψ=2χ

Για να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

ΘΕΜΑ Β9_18595

Δίνονται οι ευθείες ε_1 : 3χ +ψ+ 3 = 0 και ε_2 : χ +2ψ− 4 = 0

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ .

(Μονάδες 8)

ii) να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ έχει εξίσωση την

3χ − 4ψ−12 = 0

(Μονάδες 9)

Απάντηση

α) Είναι Α(–2, 3)

β) i) Β(0, – 3) και Γ(4, 0)

ii) Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{3}{4}$, $\psi + 3 = \frac{3}{4}(\chi - 0) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 3\chi - 4\psi - 12 = 0$.

ΘΕΜΑ Β10_18600

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ στα σημεία Α(3,0) και Β(0,6) αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1

(Μονάδες 8)

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2 (Μονάδες 9)

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 8)

Απάντηση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{6}{-3} = -2$, και η εξίσωση είναι ψ=–2χ+6

β) i) Είναι της μορφής ψ=λχ με $\lambda = \frac{1}{2}$. Άρα είναι $\varepsilon_2 : \psi = \frac{1}{2}\chi$

ii) Λύνουμε το (Σ) των εξισώσεων των ε_1 και ε_2 και είναι το σημείο $K\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

ΘΕΜΑ Β11_18601

Έστω Μ(3,5) το μέσο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με Α(1, 1) .

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου Β .

(Μονάδες 6)

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα χ΄χ έτσι, ώστε να ισχύει (ΚΑ) = (ΚΒ) .

(Μονάδες 12)

Λύση

α) i) $\frac{\chi_A+\chi_B}{2}=\chi_M \Leftrightarrow \frac{1+\chi_B}{2}=3 \Leftrightarrow \chi_B=5$

$\frac{\psi_A+\psi_B}{2}=\psi_M \Leftrightarrow \frac{1+\psi_B}{2}=5 \Leftrightarrow \psi_B=9$ Άρα Β(5, 9)

ii) λ=2 και είναι ψ=2χ–1

β) <u>α΄ τρόπος:</u>

Έστω Κ(χ, 0). Πρέπει $(KA)=(KB)\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \chi=13$.

<u>β΄ τρόπος:</u>

Το Κ είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΑΒ με τον χ΄χ.

ΘΕΜΑ Β12_18602

Δίνεται η ευθεία (ε): y+x=1 και το σημείο Α(2,–4).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε).

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι $\lambda_\varepsilon=-1$, άρα $\lambda_{\kappa\alpha\theta}=1$. Άρα ψ+4=1(χ–2) ⇔ ψ=χ–6

β) Η προβολή του Α πάνω στην (ε) είναι το κοινό σημείο της (ε) με την κάθετο από το Α στην (ε).

Άρα λύνουμε το σύστημα $\begin{cases}\psi+\chi=1\\ \psi=\chi-6\end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=\frac{7}{2}\\ \psi=\frac{-5}{2}\end{cases}$

Άρα η προβολή είναι το σημείο $P\left(\frac{7}{2},\frac{-5}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Β13_20063

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μέσο Μ και Α(1, -2), Μ(-2, 5).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Το Μ είναι μέσον του τμήματος ΑΒ οπότε θα έχουμε Β(–5, 12).

β) Έχουμε: $\lambda_{AB}=\frac{12-(-2)}{-5-1}=\frac{14}{-6}=-\frac{7}{3}$,

Είναι $\varepsilon_\mu \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_\mu}\cdot\lambda_{AB}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_\mu}=\frac{3}{7}$

Γνωρίζω σημείο Μ και συντελεστή διεύθυνσης όποτε η εξίσωση της μεσοκαθέτου είναι:

$(\varepsilon_\mu): y-5=\frac{3}{7}(x-(-2)) \Leftrightarrow 3x-7y+41=0$

Σημεία τομής της (ε_μ) με τους άξονες.

Για το Γ((ε_μ) με άξονα x΄x) θέτω στην εξίσωση της (ε_μ) όπου y=0 και λύνω ως προς x.

Επομένως $3x=-41 \Leftrightarrow x=-\frac{41}{3}$

Άρα $\Gamma\left(-\frac{41}{3},0\right)$

Για το Δ((ε_μ) με άξονα y΄y) θέτω την εξίσωση της (ε_μ) όπου x=0 και λύνω ως προς y

δηλαδή, $-7y=-41 \Leftrightarrow y=\frac{41}{7}$

Άρα $\Delta\left(0,\frac{41}{7}\right)$

ΘΕΜΑ Β14_20065

Δίνεται η ευθεία (ε):x+y+2=0 και το σημείο Α(5, 1).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1, η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη προς την ευθεία ε.

(Μονάδες 9)

β)Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2, η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Έχουμε (ε): x +y +2 =0 με $\lambda_\varepsilon=-1$.

Είναι: $\eta_1 \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\eta_1}\cdot\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\eta_1}=1$

Γνωρίζω σημείο Α και συντελεστή διεύθυνσης οπότε η εξίσωση της ευθείας η_1 είναι:

$$(\eta_1): y-1=1(x-5) \Leftrightarrow y-1=x-5$$

Άρα (η_1): x – y – 4 =0

β) Επειδή η_2//x΄x είναι $\lambda_{\eta_2}=0$, οπότε η εξίσωση της ευθείας η_2 είναι:

$$(\eta_2): y-1=0(x-5)$$

Άρα (η_2): y – 1 =0

γ) Το κοινό σημείο Μ θα το βρούμε από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών η_1 και η_2, δηλ.:

$$M:\begin{cases} x-y-4=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-4=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$$

Επομένως: Μ(5, 1).

Η απόσταση του Μ από την αρχή των αξόνων είναι:

$$(OM)=\sqrt{(5-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$$

ΘΕΜΑ Β15_22506

Θεωρούμε τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β), όπου $\alpha\cdot\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB: y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta$

(Μονάδες 7)

β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ(α, β) και είναι κάθετη προς την ευθεία ΑΒ, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση ε

(Μονάδες 9)

ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Κ και τον άξονα y΄y στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι $(OK\Lambda)=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{2\alpha\beta}$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι: $\lambda_{AB}:=\frac{\beta-0}{0-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$

Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $\varepsilon_{AB}: y-0=-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{\beta}{\alpha}x+\beta$

β) i) $\varepsilon\perp AB\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{AB}=-1\Leftrightarrow\lambda_\varepsilon=\frac{\alpha}{\beta}$

Άρα η ευθεία ε έχει εξίσωση $\varepsilon: y-\beta=\frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}$

ii) Έχουμε: $\begin{cases}\varepsilon: y=\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\\ x'' : y=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}$ Άρα $K\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha},0\right)$

Όμοια για τις συντεταγμένες του σημείου Λ

$$\begin{cases}\varepsilon: y=\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\\ y'y: x=0\end{cases}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\quad \text{Άρα}\quad \Lambda\left(0,\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\right)$$

Τέλος, $(OK)=\left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\right|$ και $(O\Lambda)=\left|\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\right|$

Άρα $(OK\Lambda)=\frac{1}{2}\cdot(OK)\cdot(O\Lambda)=\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\right|\cdot\left|\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta}\right|=\ldots=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{2\alpha\beta}$ $(\alpha\cdot\beta>0)$

ΘΕΜΑ Β16_22517

Θεωρούμε τα σημεία Α(6, μ) και Β(μ+2, μ+1) $\mu \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε μ $\in \Re$, τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα Α και Β.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ, το σημείο Γ(4,2) περιέχεται στην ευθεία ΑΒ.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έστω ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται, τότε:

$$\begin{cases} 6 = \mu + 2 \\ \mu = \mu + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 4 \\ 0 \cdot \mu = 1, \text{αδύνατο} \end{cases}$$

Άρα τα σημεία Α και Β είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Η ευθεία (ε) που διέρχεται από τα ΑΒ θα έχει τη μορφή (ε_1): $y - y_0 = \lambda_{AB}(x - x_0)$

Αν $\mu \neq 4$, τότε έχουμε $\lambda_{AB} = \dfrac{\mu + 1 - \mu}{\mu + 2 - 6} = \dfrac{1}{\mu - 4}$ και

Α(6, μ)$\in$ (ε_1): $: y - \mu = \dfrac{1}{\mu - 4}(x - 6) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\mu - 4}x - \dfrac{6}{\mu - 4} + \mu$

Αν μ=4, τότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(6,4) και Β(6, 5) θα έχει τη μορφή (ε_2):x=6

β) Αν $\mu \neq 4$, τότε το Γ(4, 2) ανήκει στην ευθεία (ε_1) αν και μόνο αν

$$2 = \frac{1}{\mu - 4}4 - \frac{6}{m - 4} + \mu \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \mu^2 - 6\mu + 6 = 0$$

$\Delta = 12$, $\mu_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$

Επομένως για $\mu_1 = 3 + \sqrt{3}$ και $\mu_2 = 3 - \sqrt{3}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ΑΒ.

Αν μ=4, τότε το σημείο Γ δεν ανήκει στην ευθεία (ε_2):x=6

ΘΕΜΑ Β17_22520

Έστω Α(–1, 1), Β(2, 0) και Γ(–1, 3) τρία σημεία του επιπέδου.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε: $3\overrightarrow{AM}^2 - 5\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 0$ είναι η ευθεία ε: 5x - 3y +1=0

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ε) που διέρχεται από το μέσο Κ του τμήματος ΑΓ.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Έχουμε: $\overrightarrow{AM}^2 = \left(\sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 1)^2}\right)^2 = \ldots = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2$

$\overrightarrow{BM}^2 = \left(\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 0)^2}\right)^2 = \ldots = x^2 - 4x + 4 + y^2$

$\overrightarrow{\Gamma M}^2 = \left(\sqrt{(x - (-1))^2 + (y - 3)^2}\right)^2 = \ldots = x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10$

Οπότε:

$$3\overrightarrow{AM}^2 - 5\overrightarrow{BM}^2 + 2\overrightarrow{\Gamma M}^2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2+2x+y^2-2y+2)-5(x^2-4x++4+y^2)+2(x^2+2x+y^2-6y+10)=0$$
$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 30x-18y+6=0 \Leftrightarrow 5x-3y+1=0$$

β) Έχουμε:

$$x_K = \frac{-1+(-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Οπότε το μέσο του ΑΓ είναι το Κ(–1,2).

Έστω (δ): $(\delta): y - y_0 = \lambda_\delta (x - x_0)$ η ευθεία που είναι κάθετη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Κ.

Επειδή $\varepsilon \perp \delta$ ισχύει $\lambda_\delta \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot \frac{5}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = -\frac{5}{3}$

Επίσης $K(-1,\, 2) \in (\delta)$: $: y-2 = -\frac{3}{5}(x+1) \Leftrightarrow (y-2) = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} + 2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$

ΘΕΜΑ Β18_22525

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οι πλευρές του ΑΒ και ΑΔ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις ε_1: 2x+y+2=0 και ε_2: x – 2y+6=0 αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο Κ(–1, –2), τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α και να αποδείξετε ότι Γ(0, –6).

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Το σημείο Α είναι το σημείο τομής των πλευρών ΑΒ και ΑΔ. Για να το βρούμε λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}.$$ Άρα Α(-2, 2)

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. Το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι Κ(–1, –2), άρα

$$x_K = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Leftrightarrow x_\Gamma = 0 \quad \text{και} \quad y_K = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Leftrightarrow y_\Gamma = -6$$

άρα Γ(0, –6)

β) Έχουμε:

$$\lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = -2$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι:

$$y-(-6) = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x-6$$

ΘΕΜΑ Β19_22531

Θεωρούμε την εξίσωση (2λ–1)x +(18–11λ)y+9λ–17=0, $\lambda \in \Re$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \Re$ παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 10)

β) Αν (ε_1), (ε_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για λ=1, λ=2 αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Είναι: Α=2λ –1, Β=18 –11λ και Γ=9λ–17

$$A=0 \Leftrightarrow 2\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2} \text{ και } B=0 \Leftrightarrow 18-11\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{18}{11}$$

Επειδή δεν υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \Re$ ώστε να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συντελεστές Α και Β, η εξίσωση (1) είναι εξίσωση ευθείας για κάθε τιμή του $\lambda \in \Re$.

β) Για λ=1 έχουμε την ευθεία

$$\varepsilon_1: x+7y-8=0$$

και για λ=2 έχουμε την ευθεία

$$\varepsilon_2: 3x-4y+1=0$$

Θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\delta_1=(7,-1)//(\varepsilon_1) \text{ και } \delta_2=(-4,-3)//(\varepsilon_2)$$

Τότε η οξεία γωνία θ των ευθειών ε_1, ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}$.

Οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|}=\frac{7(-4)+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{7^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}=\frac{-28+3}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{25}}=\frac{-25}{5\sqrt{2}\cdot 5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Άρα $\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{3\pi}{4}=135^\circ$

Οπότε η οξεία γωνία των ευθειών είναι η παραπληρωματική της δηλαδή $\theta=\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)=\frac{\pi}{4}=45^\circ$

§ 2.3: ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΑ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ - ΕΜΒΑΔΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΜΑ Β20_20062

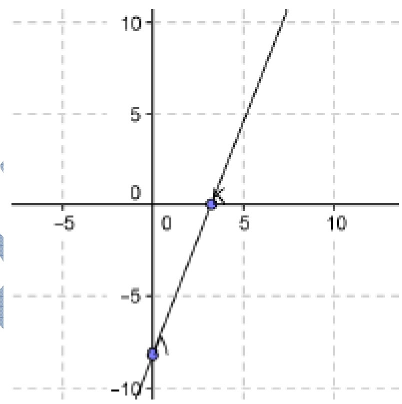
Δίνονται τα σημεία Α(1, –2) και Β(2, 3) .
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α και Β .

(Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες χ΄χ και y΄y αντίστοιχα.

(Μονάδες 14)

Λύση



α) Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα Α, Β.

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = 5$$

Έχουμε λοιπόν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=5$ και γνωστό σημείο Α(1, –2), οπότε η εξίσωση της (ε) είναι:

$$(\varepsilon): y = 5x - 7$$

Άρα: (ε): 5x – y – 7=0

β) Σημεία τομής της (ε) με τους άξονες.

Για το Κ ((ε) με άξονα χ΄χ) θέτω στην εξίσωση της (ε) όπου y=0 και λύνω ως προς x. Άρα $K\left(\frac{7}{5},0\right)$

Για το Λ ((ε) με άξονα y΄y) θέτω στην εξίσωση της (ε) όπου x=0 και λύνω ως προς y. Άρα Λ(0, –7)

Έχουμε $(OK\Lambda)=\frac{1}{2}(OK)\cdot(O\Lambda)=\frac{1}{2}\left|\frac{7}{5}\right|\cdot|-7|=\frac{49}{10}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Β21_20140

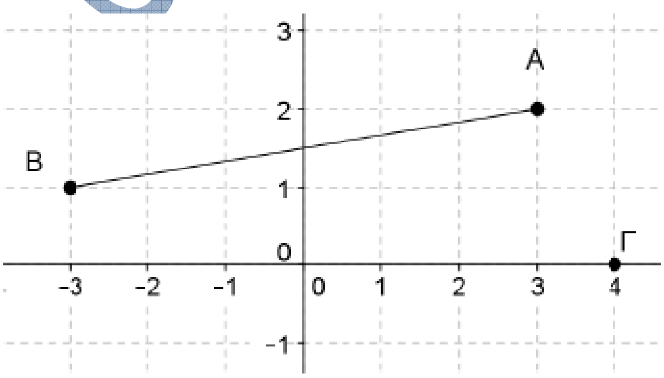
Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3, 2), Β(–3, 1), Γ(4, 0).
α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό.

(Μονάδες 16)

Λύση



α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της πλευράς ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{1}{6}$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι,

$$y-2=\frac{1}{6}(x-3)\Leftrightarrow x-6y+9=0$$

β) Αρχικά θα βρούμε την απόσταση του ύψους ΓΔ.

Έχουμε $(\Gamma\Delta)=d(\Gamma,AB)=\frac{|1\cdot 4-6\cdot 0+9|}{\sqrt{1^2+6^2}}=\frac{13\sqrt{37}}{37}$

Εύρεση εξίσωση ευθείας του ύψους ΓΔ.

Επειδή ΓΔ $\perp$ ΑΒ, τότε: $\lambda_{\Gamma\Delta}\cdot\lambda_{AB}=-1\Rightarrow\lambda_{\Gamma\Delta}=-6$

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης του ύψους ΓΔ είναι –6.

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΓΔ είναι,

$$y-0=-6(x-4)\Leftrightarrow y=-6x+24$$

ΘΕΜΑ Β22_22522

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία ε: y= x+ 1 και τα σημεία Α(2, 0) και Β(6, –3).

α) Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ.

(Μονάδες 15)

β) Έστω Γ(1, 12). Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έστω Γ(x_Γ, y_Γ). Αφού το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία ε θα επαληθεύει την εξίσωση της, επομένως $y_\Gamma = x_\Gamma + 1$ (1) και άρα Γ(x_Γ, x_Γ+1). Για να είναι το τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ θα πρέπει να ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή:

$$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2\Leftrightarrow\sqrt{(6-x_\Gamma)^2+(-3-y_\Gamma)^2}^{\,2}=\sqrt{(6-2)^2+(-3-0)^2}^{\,2}+\sqrt{(2-x_\Gamma)^2+(0-y_\Gamma)^2}^{\,2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x_\Gamma+4y_\Gamma=5\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x_\Gamma=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Άρα $y_\Gamma=x_\Gamma+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

Επομένως το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

β) Έχουμε $\overrightarrow{AB}=(6-2,-3-0)=(4,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1-2,\ 12-0)=(-1,12)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}4 & -3\\ -1 & 12\end{vmatrix}\right|=\frac{45}{2}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Β23_22523

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχy θεωρούμε την ευθεία ε: y= x+ κ – 1 όπου κ θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

α) Να βρείτε με τη βοήθεια του κ τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας με τους άξονες χ΄χ, y΄y και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

(Μονάδες 13)

β) Αν ισχύει (ΟΑΒ)<2, να αποδείξετε ότι κ=2

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η ευθεία ε: y= x + κ –1 τέμνει τον άξονα χ΄χ για y=0

$$0 = x + \kappa - 1 \Leftrightarrow x = 1 - \kappa \text{, άρα } A(1-\kappa,\ 0)$$

Η ευθεία ε: y= x + κ –1 τέμνει τον άξονα y΄y για x=0

$$y = 0 + \kappa - 1 \Leftrightarrow y = \kappa - 1 \text{, άρα } B(0,\ \kappa - 1)$$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι:

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}|\kappa-1||1-\kappa| = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$$

β) Έχουμε: $(OAB) < 2 \Leftrightarrow \frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$

Όμως ο κ είναι θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας, άρα κ=2.

ΘΕΜΑ Β24_22529

Θεωρούμε την ευθεία ε: 3x – 4y + 2 = 0 και το σημείο Α(–2, 1).

α) Να αποδείξετε ότι το Α δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από αυτή.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το Α απόσταση ίση με 3 μονάδες.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Θέτω στην εξίσωση της ευθείας (ε) όπου x=–2 και y=1

$$3(-2) - 4\cdot 1 + 2 = -6 - 4 + 2 = -8 \neq 0$$

οπότε, Α$\notin$ (ε) αφού οι συντεταγμένες του δεν επαληθεύουν τον τύπο της (ε).

$$d(A,\varepsilon) = \frac{|3(-2) - 4\cdot 1 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-6-4+2|}{\sqrt{25}} = \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$$

β) Επειδή $\lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$ όλες οι ευθείες (η) που είναι παράλληλες προς την (ε) έχουν: $\lambda_\eta = \lambda_\varepsilon = \frac{3}{4}$

και θα είναι της μορφής: $(\eta): y = \frac{3}{4}x + \beta$ ή $(\eta): 3x - 4y + \beta = 0$ (1)

Δίνεται ότι d(Α, η)=3, οπότε:

$$d(A,\eta)=3 \Leftrightarrow \frac{|3(-2)-4\cdot 1+\beta|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3 \Leftrightarrow \frac{|-6-4+\beta|}{5}=3 \Leftrightarrow |\beta-10|=15 \Leftrightarrow \beta-10=\pm 15 \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=25\\ \beta=-5\end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι:

(η_1): 3x – 4y+25=0 ή (η_2): 3x–4y – 5=0

ΘΕΜΑ Β25_22532

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέϊκα (Κ) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες Δ(–2, 2), Λ(2, –1) και Κ(–1, –10).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ).

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την απόσταση του Κ από την ευθεία (ε).

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέικα.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Έχουμε $\lambda_{\Delta\Lambda}=\frac{-1-2}{2-(-2)}=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$

Οπότε η εξίσωση (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι είναι:

$$(\varepsilon): y-2=-\frac{3}{4}(x-(-2)) \Leftrightarrow 4y-8=-3x-6 \Leftrightarrow 3x+4y-2=0$$

β) Έχουμε: $d(K,\varepsilon)=\frac{|3(-1)+4\cdot(-10)-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-30-40-2|}{5}=9$

γ) Έχουμε:

$$(\Delta K)=\sqrt{(-1-(-2))^2+(-10-2)^2}=\sqrt{(-1+2)^2+(-12)^2}=\sqrt{1+144}=\sqrt{145}$$

$$(\Lambda K)=\sqrt{(-1-2)^2+(-10-(-1))^2}=\sqrt{(-3)^2+(-10+1)^2}=\sqrt{9+81}=\sqrt{90}$$

Άρα το Λευκοχώρι είναι πιο κοντά στα Κακουρέικα από το χωριό Δόξα.

ΘΕΜΑ B26_22537

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(λ–1, λ+2) και Β(μ+3, μ) λ, μ $\in \Re$.
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β κινούνται στις ευθείες ε_1: y=x +3 και ε_2: y= x – 3 αντίστοιχα.
(Μονάδες 12)
β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε_1, ε_2.
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για το σημείο Α έχουμε:

$$\begin{cases} x_A = \lambda - 1 \\ y_A = \lambda + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x_A + 1 \\ \lambda = y_A - 2 \end{cases} \quad \text{Άρα } x_A + 1 = y_A - 2 \Leftrightarrow x_A - y_A + 3 = 0$$

Δηλαδή το σημείο Α βρίσκεται στην ευθεία ε_1: x– y + 3 =0

Για το σημείο Β έχουμε:

$$\begin{cases} x_B = \mu + 3 \\ y_B = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = x_A - 3 \\ \mu = y_B \end{cases} \quad \text{Άρα } x_B - 3 = y_B \Leftrightarrow x_B - y_B - 3 = 0$$

Δηλαδή, το σημείο Β βρίσκεται στην ευθεία ε_2: x– y – 3 =0

β) <u>α΄ τρόπος:</u>

Αφού τα σημεία Α(λ –1, λ +2) για κάθε $\lambda \in \Re$ κινούνται στην ευθεία ε_1, θεωρούμε π.χ. για λ=0 το Α(–1, 2). Επίσης τα σημεία Β(μ+3, μ) για κάθε $\mu \in \Re$ κινούνται στην ευθεία ε_2, θεωρούμε π.χ. για μ=0 το Β(3, 0). Το μέσο Μ του ΑΒ είναι το σημείο Μ(1, 1) και ανήκει στη μεσοπαράλληλη (ε) των (ε_1) και (ε_2) .

Είναι: $\lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = 1$

Άρα η (ε) έχει εξίσωση: ψ–1=1(x–1) ⇔ ψ=x .

<u>β΄ τρόπος:</u>

Το σημείο Μ(x, ψ) ανήκει στη μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) αν και μόνο αν

$$d(M,(\varepsilon_1)) = d(M,(\varepsilon_2)) \Leftrightarrow \frac{|x-\psi+3|}{\sqrt{2}} = \frac{|x-\psi-3|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\psi+3 = x-\psi-3 \quad \text{αδύνατη} \\ \text{ή} \\ x-\psi+3 = -x+\psi+3 \Leftrightarrow 2x = 2\psi \Leftrightarrow \psi = x \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Β27_22538

Δίνονται τα σημεία Α(0, 2), Β(1, 5) και Γ(t–1, 3t – 2), $t \in \Re$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανεξάρτητα του t.

(Μονάδες 18)

Λύση

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ θα είναι

$$\lambda_{AB}=\frac{y_{AB}-y_A}{x_{AB}-x_A}=\frac{5-2}{1-0}=3$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ θα είναι: $y-2=3(x-0)\Leftrightarrow y=3x+2$
ή στη γενική της μορφή 3x – y +2=0

β) Η απόσταση του σημείου Γ(t–1, 3t–2) από την ευθεία ΑΒ δίνεται από τον τύπο

$$d(\Gamma,AB)=\frac{|3x_\Gamma-y_\Gamma+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{|3(t-1)-(3t-2)+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|3t-3-3t+2+2|}{\sqrt{10}}=\frac{|1|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

και είναι ανεξάρτητη του $t \in \Re$

Είναι $\overrightarrow{AB}=(1-0,5-2)=(1,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=((t-1)-0,(3t-2)-2)=(t-1,3t-4)$

Συνεπώς,

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}1 & 3\\ t-1 & 3t-4\end{vmatrix}=3t-4-3(t-1).=3t-4-3t+3=-1$$

Και άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}|-1|=\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1_18610

Δίνονται οι ευθείες $ε_1$:2χ −ψ−10λ +16 = 0 και $ε_2$:10χ +ψ−2λ − 4 = 0 , όπου λ∈R.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Μ

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία

ε : 8χ +ψ− 6 = 0

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες χ΄χ και ψ΄ψ στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ

(Μονάδες 5)

ii) αν Κ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ , να αποδείξετε ότι (ΚΑΒ)= $\frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι το (Σ)$\begin{cases} 2x-ψ=10λ-16 \\ 10x+ψ=2λ+4 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση για κάθε λ ∈ R.

Πράγματι $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}=2-(-10)=12\neq 0$

Είναι $D_X=\begin{vmatrix} 10λ-16 & -1 \\ 2λ+4 & 1 \end{vmatrix}=10λ-16+2λ+4=12λ-12$

$D_ψ=\begin{vmatrix} 2 & 10λ-16 \\ 10 & 2λ+4 \end{vmatrix}=4λ+8-100λ+160=-96λ+168$

Άρα: $x_M=\frac{D_x}{D}=λ-1$, $ψ_M=\frac{D_ψ}{D}=-8λ+14$

Οπότε Μ(λ–1, –8λ+14), λ∈ R.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι x_M, $ψ_M$ επαληθεύουν την εξίσωση της (ε).

Πράγματι: 8 (λ –1) – 8λ +14 –6=0

γ) i) Για ψ=0 Α $\left(\frac{3}{4},0\right)$ και για x=0 Β(0, 6)

$λ_ζ=λ_{AB}=λ_ε=-8$. Άρα η (ζ) έχει εξίσωση ψ=–8x.

ii) Αφού Κ (x_0, $ψ_0$) τυχαίο σημείο της (ζ) είναι $ψ_0 = -8x_0$,

δηλ. Κ (x_0, -8x_0), $\overrightarrow{KA}=\left(\frac{3}{4}-x_0,ψ_0\right)$ $\overrightarrow{KB}=\left(-x_0,6+8x_0\right)$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}-x_0 & 8x_0 \\ -x_0 & 6+8x_0 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4}-x_0\right)(6+8x_0)+8{x_0}^2 = \frac{9}{2}$$

Άρα $KAB = \frac{1}{2}\left|\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{4}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ2_18611

Δίνεται η ευθεία ε : χ − 4ψ− 7 = 0 και τα σημεία Α(−2,4) και Β(2,6)

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Μ της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Α και Β

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ (χ, ψ) για τα οποία ισχύει (ΚΑΒ) = (ΜΑΒ) ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: χ −2ψ− 5 = 0 και χ −2ψ+ 25 = 0

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Το Μ είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου του ΑΒ με την (ε).

$\lambda_{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lambda_{μεσ}=-2$

Αν Γ μέσο ΑΒ, τότε Γ(0,5) οπότε η μεσοκάθετος είναι:

$\psi - 5 = -2(x-0) \Leftrightarrow \psi = -2x+5$

Λύνουμε (Σ) $\begin{cases} x-4\psi-7=0 \\ \psi=-2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \psi=-1 \end{cases}$

Άρα Μ(3, −1)

β) $\overrightarrow{MA}=(-5,5)$, $\overrightarrow{MB}=(-1,7)$ $\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -35+5=-30$

(ΜΑΒ) = $\frac{1}{2}|-30| = 15$ τ.μ.

γ) $\overrightarrow{KA}=(-2-x,4-\psi)$, $\overrightarrow{KB}=(2-x,6-\psi)$

(ΚΑΒ) = $\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2-x & 4-\psi \\ 2-x & 6-\psi \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|-2x+4\psi-20| = |x-2\psi+10|$

Ισχύει (ΚΑΒ)=(ΜΑΒ)⇔|x−2ψ+10|=15⇔

$$\begin{cases} x-2\psi+10=15 \\ ή \\ x-2\psi+10=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\psi-5=0 \\ ή \\ x-2\psi+25=0 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία Κ(x, ψ) ανήκουν στις παραπάνω ευθείες.

ΘΕΜΑ Δ3_18612

Δίνεται η εξίσωση: $χ^2 + 2χψ+ψ^2 - 6χ - 6ψ+ 8 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές $ε_1$ και $ε_2$ οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 7)

β) Αν $ε_1 : χ +ψ-2 = 0$ και $ε_2 : χ +ψ- 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των $ε_1$ και $ε_2$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας $ε_1$ με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας $ε_2$ με τετμημένη το 1 , τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β

(Μονάδες 2)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) $x^2 + (2ψ-6)x + ψ^2 - 6ψ + 8 = 0$, τριώνυμο του x

$Δ = (2ψ-6)^2 - 4(ψ^2 - 6ψ + 8) = 4ψ^2 - 24ψ + 36 - 4ψ^2 + 24ψ - 32 = 4$

$x_{1,2} = \dfrac{-2ψ+6\pm 2}{2} = \begin{cases} -ψ+4 \\ -ψ+2 \end{cases},$

Έτσι γράφεται: $(x+ψ-4)(x+ψ-2)=0 \Leftarrow \begin{cases} x+ψ-4=0 \\ ή \\ x+ψ-2=0 \end{cases}$

β) Είναι $ε_1 // ε_2$.

Έστω τυχαίο σημείο $Μ_1$ της $(ε_1)$, π.χ. για x=0, ψ=2 $Μ_1(0,2)$.

Έστω τυχαίο σημείο $Μ_2$ της $(ε_2)$, π.χ. για x=0, ψ=4 $Μ_2(0,4)$.

Το μέσο Μ του $Μ_1Μ_2$ είναι σημείο της μεσοπαραλλήλου και είναι Μ(0, 3) $λ_{μεσ}=λ_{ε_1}=-1$

Άρα η (ε) έχει εξίσωση: $ψ - 3 = -1(x-0) \Leftrightarrow ψ = -x+3$

γ)i) Για ψ=2 από $(ε_1)$ είναι x=0, άρα Α(0,2)

Για x=1 από $(ε_2)$ είναι ψ=3, άρα Β(1,3)

ii) Αφού Γ, Δ ανήκουν στην (ε) είναι Γ $(x_1, -x_1+3)$ και Δ $(x_2, -x_2+3)$.

Για να είναι ΑΓΒΔ τετράγωνο πρέπει οι διαγώνιες του να διχοτομούνται, να είναι ίσες και κάθετες.

Κάθετες είναι αφού ΑΒ κάθετη στην ΓΔ ($λ_{ΑΒ}=1$)

Αν Ρ το μέσο του ΑΒ, τότε $Ρ\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

Άρα πρέπει $\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-x_1+3-x_2+3}{2}=\dfrac{5}{2} \\ (\Gamma\Delta)=(AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ -x_1-x_2=-1 \\ \sqrt{(x_1-x_2)^2+(-x_1+3+x_2-3)^2}=\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=1 \\ (x_1-x_2)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \end{cases}.$$

Άρα Γ(1,2) και Δ(0, 3).

ΘΕΜΑ Δ4_18613

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-3\lambda x+3\lambda y+2\lambda^2=0$, με λ διαφορετικό του 0.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1.

(Μονάδες 12)

β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος (α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) $x^2+(-2\psi-3\lambda)x+\psi^2+3\lambda\psi+2\lambda^2=0\ ,\ \lambda\neq 0$

$\Delta=(-2\psi-3\lambda)^2-4(\psi^2+3\lambda\psi+2\lambda^2)=4\psi^2+9\lambda^2+12\lambda\psi-4\psi^2-12\lambda\psi-8\lambda^2=\lambda^2,\ \lambda\neq 0$

$x_{1,2}=\dfrac{2\psi+3\lambda\pm\lambda}{2}=\Big\langle \begin{matrix}\psi+2\lambda \\ \psi+\lambda\end{matrix}$

Γίνεται: $(x-\psi-2\lambda)(x-\psi-\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\psi-2\lambda=0 & (\varepsilon_1) \\ x-\psi-\lambda=0 & (\varepsilon_2) \end{cases}$ που είναι 2 ευθείες παράλληλες με κλίση ίση με 1.

β) Η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την απόσταση των 2 παραλλήλων ευθειών.

Αν Α τυχαίο σημείο της (ε_1), π.χ. για ψ=0, x=2λ, είναι Α(2λ, 0)

Οπότε $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)= d(A,(\varepsilon_2))=\dfrac{|2\lambda-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$.

Είναι $E=2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2}}\right)^2=2 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^2}{2}=2 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$.

ΘΕΜΑ Δ5_18614

Δίνονται οι ευθείες ε_1 : 3χ +ψ+ 3 = 0 και ε_2 : χ +2ψ− 4 = 0

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Γ , τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ (χ, ψ) για τα οποία ισχύει (ΚΒΓ) = (ΑΒΓ) ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Λύνουμε το (Σ) των εξισώσεων των (ε_1) και (ε_2) είναι Α(–2,3).

β) i) Για x=0 στην (ε_1), ψ=-3 άρα Β(0, -3)

Για ψ=0 στην (ε_2), x=4 άρα Γ(4, 0)

$\lambda_{ΒΓ}=\dfrac{3}{4}$ άρα η ΒΓ έχει εξίσωση: $\psi+3=\dfrac{3}{4}(x-0)\Leftrightarrow \psi=\dfrac{3}{4}x-3$

ii) $\overrightarrow{AB}=(2,-6)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(6,-3)$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=-6+36=30$

(ΑΒΓ)= $\dfrac{1}{2}|30|=15$ τμ

γ) Όπως Θέμα Δ2 ερώτημα (γ)

ΘΕΜΑ Δ6_18615

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που είναι παράλληλο προς την ευθεία ε : ψ = χ , με Α(χ_1, ψ_1) , Β(χ_2, ψ_2) και $\chi_1 < \chi_2$. Αν το σημείο Μ(3,5) είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων Α και Β ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β .

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι (ΟΑΒ) = 4 , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ(χ, ψ) για τα οποία ισχύει (ΚΑΒ) = 2(ΟΑΒ) ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: χ −ψ−2 = 0 και χ −ψ+ 6 = 0

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Αφού Μ(3, 5) μέσο του ΑΒ έχουμε $\dfrac{x_1+x_2}{2}=3,\dfrac{\psi_1+\psi_2}{2}=5$

Άρα $\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}=3 \\ x_1x_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=5 \end{cases}$

Άρα τα x_1, x_2 είναι ρίζες της $x^2 - 6x + 5 = 0$ και αφού $x_1<x_2$ είναι $x_1=1$ και $x_2=5$.

Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{\psi_2-\psi_1}{x_2-x_1}=1$ (αφού ΑΒ//ε) $\Leftrightarrow \psi_2-\psi_1=x_2-x_1 \Leftrightarrow \psi_2-\psi_1=4$

Άρα $\begin{cases} \dfrac{\psi_1+\psi_2}{2}=5 \\ \psi_2-\psi_1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1+\psi_2=10 \\ -\psi_1+\psi_2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi_1=3 \\ \psi_2=7 \end{cases}$

Άρα Α(1, 3) και Β(5, 7)

β) $\overrightarrow{OA}=(1,3)$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=7-15=-8$

$\overrightarrow{OB}=(5,7)$

(OAB)= $\frac{1}{2}|-8|=4$ τμ

γ) Όπως θέμα Δ2 ερώτημα (γ)

ΘΕΜΑ Δ7_18620

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $(2\lambda-1)x+y-5=0$, ε_2: $(\lambda^2+3)x-y-15=0$ με $\lambda\in R$ και το σημείο Α(2,–1).

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda\in R$ οι ευθείες τέμνονται.

(Μονάδες 7)

β) Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Α, να βρείτε την τιμή του $\lambda\in R$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω λ=2 και Β, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα y΄y. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) $\begin{cases}(2\lambda-1)x+\psi=5\\(\lambda^2+3)x-\psi=15\end{cases}$

Είναι $D=\begin{vmatrix}2\lambda-1 & 1\\ \lambda^2+3 & -1\end{vmatrix}=\ldots=-\lambda^2-2\lambda-2<0$ για κάθε $\lambda\in R$ αφού είναι τριώνυμο με Δ=–4<0

Άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση, δηλαδή οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda\in R$.

β) <u>**α΄ τρόπος**</u>

Αφού τέμνονται στο Α(2, 1) οι συντεταγμένες του Α θα επαληθεύουν και τις 2 εξισώσεις.

Άρα $\begin{cases}(2\lambda-1)2-1-5=0\\ \text{και}\\ (\lambda^2+3)2+1-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\lambda-8=0\\ \text{και}\\ 2\lambda^2-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=2$

<u>**β΄τρόπος**</u>

Είναι $D_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 15 & -1\end{vmatrix}=-20$, $D_\psi=\begin{vmatrix}2\lambda-1 & 5\\ \lambda^2+3 & 15\end{vmatrix}=\ldots=-5\lambda^2+30\lambda-30$

Αφού το Α(2, –1) είναι το σημείο τομής έχουμε:

$$\begin{cases}\dfrac{Dx}{D}=2\\ \text{και}\\ \dfrac{D\psi}{D}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-20}{-\lambda^2-2\lambda-2}=2\\ \text{και}\\ \dfrac{-5\lambda^2+30\lambda-30}{-\lambda^2-2\lambda-2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^2+2\lambda-8=0\\ \text{και}\\ 6\lambda^2-28\lambda+32=0\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=2$$

γ) Για λ=2 ε_1: 3x + ψ–5 =0 (για x=0) ψ=5 Άρα Β(0, 5)

ε_2: 7x - ψ–15 =0 (για x=0) ψ=–15 Άρα Γ(0, –15)

$\overrightarrow{AB}=(-2,6)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(-2,-14)$

Άρα (ΑΒΓ)= $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -2 & -14\end{vmatrix}\right|=20$ τμ

ΘΕΜΑ Δ8_18621

Δίνονται οι ευθείες ε :2κχ – (1+ κ)ψ+1– 3κ = 0 και ζ : (1+ 3κ) χ + (κ –1)ψ+ 2 – 6κ = 0 , όπου $\kappa\in R$

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του κ , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) .

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Έστω $\vec{\delta_1}//\varepsilon$ είναι $\vec{\delta_1}=(-1-\kappa,-2\kappa)$ και

$\vec{\delta_2}//\zeta$ είναι $\vec{\delta_2}=(\kappa-1,-1-3\kappa)$

Για να είναι ε//ζ πρέπει και αρκεί $\vec{\delta_1}//\vec{\delta_2}\Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix}-1-\kappa & -2\kappa\\ \kappa-1 & -1-3\kappa\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(-1-\kappa)(-1-3\kappa)+2\kappa(\kappa-1)=0\Leftrightarrow 5\kappa^2+2\kappa+1=0$, όμως Δ=–16<0

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\kappa\in R$ ώστε ε//ζ

β) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}||\vec{\delta_2}|}$ (1)

$\vec{\delta_1}\vec{\delta_2}=(-1-\kappa)(\kappa-1)+(-2\kappa)(-1-3\kappa)=-\kappa+1-\kappa^2+\kappa+2\kappa+6\kappa^2=5\kappa^2+2\kappa+1$

$|\vec{\delta_1}|=\sqrt{(-1-\kappa)^2+(-2\kappa)^2}=\sqrt{1+\kappa^2+2\kappa+4\kappa^2}=\sqrt{5\kappa^2+2\kappa+1}$

$|\vec{\delta_2}|=\sqrt{(\kappa-1)^2+(-1-3\kappa)^2}=\sqrt{\kappa^2-2\kappa+1+1+9\kappa^2+6\kappa}=\sqrt{10\kappa^2+4\kappa+2}=\sqrt{2}\sqrt{5\kappa^2+2\kappa+1}$

Από (1) $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Οπότε $\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{\pi}{4}$, άρα η αμβλεία γωνία των ε και ζ είναι $\frac{3\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ Δ9_20147

Δίνονται τα σημεία Α(λ+1, λ–1), Β(2, 2) και Γ(4, 6), $\lambda \in R$.

α) Να βρείτε τη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ.

(Μονάδες 7)

β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

γ) Για λ=4, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος.

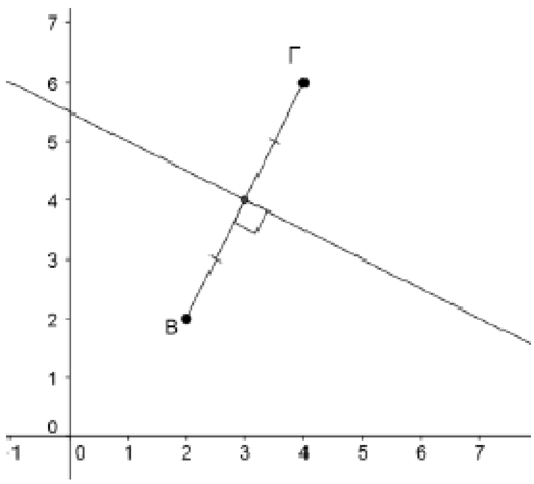
(Μονάδες 10)

Λύση

α) Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι Μ(3, 4).

Είναι $\lambda_{B\Gamma}=2$

$$\lambda_\mu \cdot \lambda_{B\Gamma}=-1 \Leftrightarrow \lambda_{\mu\varepsilon\sigma}=-\frac{1}{2}.$$



Η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι :

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow x+2y-11=0.$$

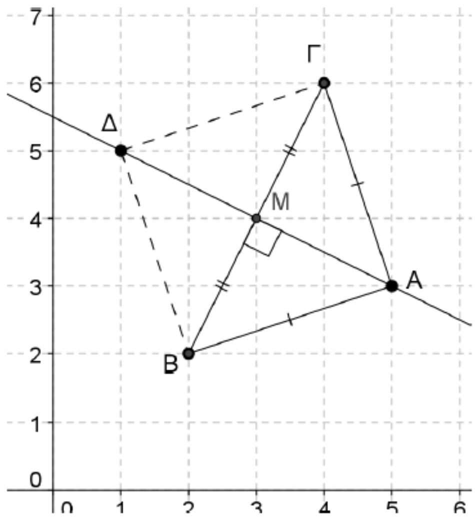
β) Επειδή το Α ισαπέχει από τα σημεία Β, Γ σημαίνει ότι ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, άρα ανήκει στην ευθεία x +2y – 11=0, οπότε οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν, δηλαδή

$$\lambda+1+2(\lambda-1)-11=0 \Leftrightarrow \lambda=4,$$

άρα Α(5, 3).

γ) Έστω Δ(x_Δ, y_Δ) οι συντεταγμένες του σημείου Δ, τότε το Μ είναι και μέσο του ΑΔ, οπότε

$$\left.\begin{array}{c} x_M=\dfrac{x_A+x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta=1 \\ \text{και} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta=5 \end{array}\right\} \text{Άρα Δ(1, 5)}$$



ΘΕΜΑ Δ10_22562

Θεωρούμε τα σημεία Α(–2t+6, 0), Β(0, 4t – 2) , $t \in R$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

γ) Αν (ΑΒ)=d, να αποδείξετε ότι $d^2 \geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα Α, Β ώστε η απόσταση (ΑΒ) να είναι ελάχιστη.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Αφού το Μ είναι μέσο του ΑΒ έχουμε

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{-2t+6}{2} \\ y_M = \dfrac{4t-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -t+3 \\ y_M = 2t-1 \end{cases}$$

Έτσι: Μ(–t+3, 2t – 1) με $t \in R$

β) Έστω Μ(x, y), οπότε:

$$\begin{cases} x = -t+3 \\ y = 2t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3-x \\ y+1 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3-x \\ t = \dfrac{y+1}{2} \end{cases}$$

Έτσι: $\dfrac{y+1}{2} = 3 - x \Leftrightarrow y = -2x+5$

Άρα το Μ κινείται στην ευθεία (ε): y = –2x + 5

γ) $(AB) = \sqrt{(-2t+6)^2 + (4t-2)^2} = \ldots = \sqrt{20t^2 - 40t + 40}$

Αφού $(AB) = d \Leftrightarrow d = \sqrt{20t^2 - 40t + 40}$

Έτσι $d^2 = 20t^2 – 40\,t + 40$

Η d^2 είναι συνάρτηση ως προς t

Άρα έχουμε $d^2(t) = 20^2 – 40t + 40$ με $t \in R$

Η συνάρτηση $d^2(t)$ έχει την ελάχιστη τιμή της για

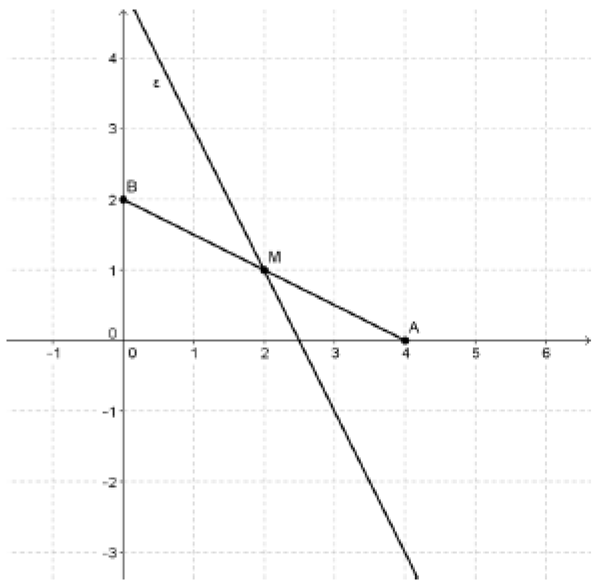
$t_0 = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-40}{2 \cdot 20} = 1$

Η ελάχιστη τιμή της $d^2(t)$ είναι

$d^2(1) = 20 – 40 + 40 = 20$

Άρα $d^2 \geq 20$ με $d^2 = 20$ για t=1 , οπότε

Α(4, 0), Β(0, 2).



ΘΕΜΑ Δ11_22564

Θεωρούμε τις εξισώσεις

$$\varepsilon_\lambda: (\lambda-1)x + (\lambda-2)y-\lambda+3 = 0,\ \ \lambda \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ε_λ) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 10)

β) Έστω $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$. Αν η (ε_λ) τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β) αντίστοιχα, τότε:

i) Να εκφράσετε τα α, β συναρτήσει του λ. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=2$

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Έχουμε,

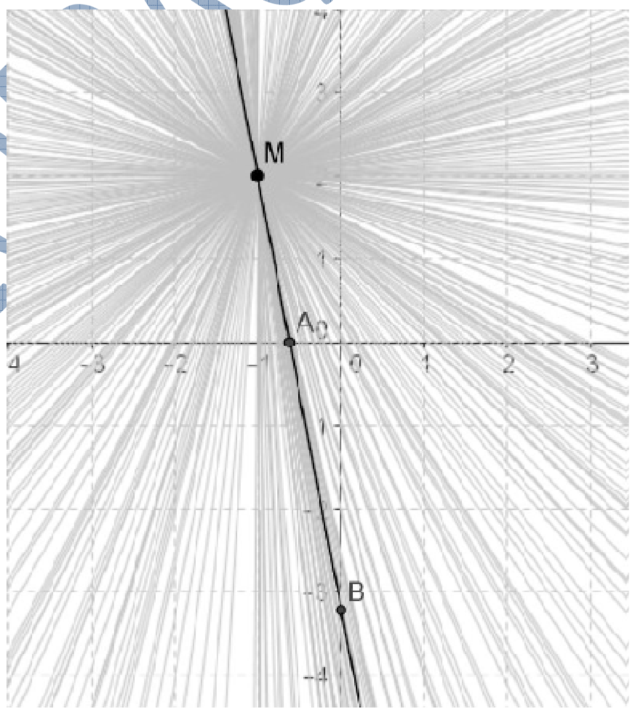
$$A=0 \Leftrightarrow \lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ και } B=0 \Leftrightarrow \lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Άρα δεν υπάρχει καμία πραγματική τιμή του λ που να μηδενίζει ταυτόχρονα τα Α και Β, άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθείες (οικογένεια ευθειών) για τις διάφορες τιμές του λ.

Για λ=1 βρίσκουμε την ευθεία: $-y-1+3=0$ $y=2$

Για λ=2 βρίσκουμε την ευθεία: $x-2+3=0$ $x=-1$

Οι ευθείες αυτές τέμνονται στο σημείο Μ(–1, 2). Θα αποδείξουμε ότι το σημείο αυτό ανήκει σε όλες τις ευθείες (ε_λ), άρα είναι το σταθερό σημείο που διέρχονται οι ευθείες.



Για x= –1 και y = 2 γίνεται η αρχική εξίσωση:

$$(\lambda-1)(-1)+(\lambda-2)2-\lambda+3=-\lambda+1+2\lambda-4-\lambda+3=0$$

Άρα την επαληθεύει, οπότε το σημείο Μ(–1, 2) είναι το σταθερό σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες (δέσμη ευθειών).

β) i) Η εξίσωση $(\lambda-1)x+(\lambda-2)y-\lambda+3=0$ γίνεται για

- x=0,

$(\lambda-1)0+(\lambda-2)y-\lambda+3=0 \Leftrightarrow y=\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$ Άρα $\beta=\frac{\lambda-3}{\lambda-2}$

- y=0

$(\lambda-1)x+(\lambda-2)0-\lambda+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{\lambda-3}{\lambda-1}$ Άρα $\alpha=\frac{\lambda-3}{\lambda-1}$

ii) $$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=2 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{\lambda-3}{\lambda-1}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{\lambda-3}{\lambda-2}\right)^2}=2 \Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-3)^2}+\frac{(\lambda-2)^2}{(\lambda-3)^2}=2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2+(\lambda-2)^2=2(\lambda-3)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda=\frac{13}{6}$$

Για η $\lambda=\frac{13}{6}$ αρχική εξίσωση γίνεται:

$$\left(\frac{13}{6}-1\right)x+\left(\frac{13}{6}-2\right)y-\frac{13}{6}+3=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=-7x-5$$

ΘΕΜΑ Δ12_23341

Θεωρούμε σημεία Μ(α, α+1), $\alpha \in R$

α) Να δείξετε ότι κινούνται στην ευθεία y=x+1

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το συμμετρικό Μ΄(α΄, β΄) του Μ ως προς την ευθεία x – 2y=2

(Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι το Μ΄ κινείται, για τις διάφορες τιμές του α, στην ευθεία x – 7y – 17=0

(Μονάδες 5)

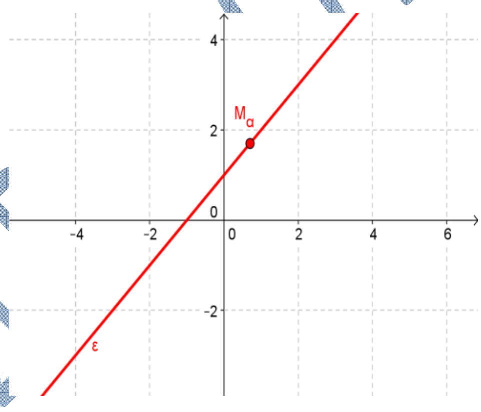
δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Έστω Μ(x, y) οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y-1=\alpha \end{cases} \quad \text{Άρα } y=x+1$$



Οπότε τα σημεία Μ(α, α+1) κινούνται στην ευθεία (ε):y=x+1

β) Από το Μ(α, α+1) φέρνουμε ευθεία (κ) κάθετη στην ευθεία (ζ): x–2y=2 (1)

Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας (κ)

Είναι $\lambda_\zeta=\frac{1}{2}$ και αφού $(\kappa)\perp(\zeta)$ είναι $\lambda_\eta=-2$

Οπότε: y–α–1=–2(x–α) $\Leftrightarrow$ y=–2x+2α + α +1$\Leftrightarrow$ y=–2x + 3α+1 (2)

Βρίσκουμε το σημείο τομής της (κ) με τη (ζ) λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων τους των σχέσεων (1) και (2),

$$x-2(-2x+3\alpha+1)=2 \Leftrightarrow x+4x-6\alpha-2=2 \Leftrightarrow 5x=6\alpha+4 \Leftrightarrow x=\frac{6\alpha+4}{5}$$

Για $x=\frac{6\alpha+4}{5}$ η (2) γίνεται,

$$y=-2\frac{6\alpha+4}{5}+3\alpha+1 \Leftrightarrow y=\frac{-12\alpha-8}{5}+3\alpha+1 \Leftrightarrow y=\frac{-12\alpha-8+15\alpha+5}{5} \Leftrightarrow y=\frac{3\alpha-3}{5}$$

Άρα η (κ) και η (ζ) τέμνονται στο σημείο $K\left(\frac{6\alpha+4}{5},\frac{3\alpha-3}{5}\right)$

Έτσι το Μ΄(α΄, β΄) θα είναι το συμμετρικό του Μ ως προς το Κ, άρα το Κ είναι μέσο του ΜΜ΄, άρα

$$\begin{cases} x_K=\frac{x_M+x_{M'}}{2} \\ y_K=\frac{y_M+y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6\alpha+4}{5}=\frac{\alpha+x_{M'}}{2} \\ \frac{3\alpha-3}{5}=\frac{\alpha+1+y_{M'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\alpha+8=5\alpha+5x_{M'} \\ 6\alpha-6=5\alpha+5+5y_{M'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7\alpha+8=5x_{M'} \\ \alpha-11=5y_{M'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7\alpha+8}{5}=x_{M'} \\ \frac{\alpha-11}{5}=y_{M'} \end{cases}$$

δηλαδή $M'\left(\frac{7\alpha+8}{5},\frac{\alpha-11}{5}\right)$

γ) Έστω Μ΄(x, y) άρα $\begin{cases} x=\dfrac{7\alpha+8}{5} \\ y=\dfrac{\alpha-11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=7\alpha+8 \\ 5y=\alpha-11 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5x-8}{7}=\alpha \\ 5y+11=\alpha \end{cases}$

Άρα $\dfrac{5x-8}{7}=5y+11 \Leftrightarrow 5x-8=35y+77 \Leftrightarrow 5x-35y-85=0 \Leftrightarrow x-7y-17=0$ (η)

δ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (ε) και (ζ).

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} y=x+1 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ x=-4 \end{cases}$

Άρα η (ε) και η (ζ) τέμνονται στο σημείο Α(–4, –3).

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του Α στην εξίσωση της ευθείας (η) έχουμε

$$-4-7(-3)-17=0$$

Οπότε και η (η) διέρχεται από το Α.

Οι ε και ζ τέμνονται στο σημείο Α, το Α έχει συμμετρικό ως προς τη ζ το Α, οπότε η συμμετρική ευθεία της ε ως προς τη ζ θα περνά κατ' ανάγκη από το Α. Έτσι λοιπόν η (η) θα περνά κατ' ανάγκη από το Α. Για αυτό το λόγο οι τρεις ευθείες συντρέχουν.

ΘΕΜΑ Δ13_22563

Θεωρούμε το σημείο Μ(–3, –2) και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α, Β.

α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής λ της ευθείας είναι αρνητικός.

(Μονάδες 10)

β) Έστω Ε(λ) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ .

i) Να αποδείξετε ότι Ε(λ)≥ 12 για κάθε λ<0.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Έστω ότι η ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ(–3, –2) τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα των x΄x στο σημείο $A(x_A, 0)$ με $x_A<0$ και τον αρνητικό ημιάξονα των y΄y στο σημείο $B(0, y_B)$ με $y_B<0$.

Οπότε $\lambda=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-\dfrac{y_B}{x_A}$

Αφού $y_B<0$ και $x_A<0$ είναι $\dfrac{y_B}{x_A}>0 \Leftrightarrow -\dfrac{y_B}{x_A}<0 \Leftrightarrow \lambda<0$

β) i) Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το Μ(–3, –2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ (από το α) ερώτημα) είναι:

(ε): $y+2=\lambda(x+3) \Rightarrow y=\lambda x+3\lambda-2$ (1)

Για y=0 γίνεται $-\lambda x=3\lambda-2 \Leftrightarrow x=\frac{3\lambda-2}{-\lambda} \Leftrightarrow x=\frac{2-3\lambda}{\lambda}$

Άρα $A\left(\frac{2-3\lambda}{\lambda},0\right)$

Για x=0, (1) έχουμε y=3λ –2

Άρα Β(0, 3λ – 2)

Έτσι :

$$\left(\overset{\Delta}{OAB}\right)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{2-3\lambda}{\lambda}\right||3\lambda-2|=\frac{1}{2}\left|\frac{3\lambda-2}{\lambda}\right||3\lambda-2|=...=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{|3\lambda-2|^2}{|\lambda|}=\frac{1}{2}\frac{(3\lambda-2)^2}{|\lambda|}\overset{\lambda<0}{=}\frac{1}{2}\frac{(3\lambda-2)^2}{-\lambda}=-\frac{(3\lambda-2)^2}{2\lambda}$$

Άρα $E(\lambda)=-\frac{(3\lambda-2)^2}{2\lambda}$ με λ<0

Έχουμε

$$E(\lambda)\geq 12 \Leftrightarrow -\frac{(3\lambda-2)^2}{2\lambda}\geq 12 \Leftrightarrow -\frac{9\lambda^2-12\lambda+4}{2\lambda}\geq 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\lambda^2+12\lambda+4\geq 0 \Leftrightarrow (3\lambda+2)^2\geq 0$$ που ισχύει για κάθε λ<0.

ii) Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι Ε(λ)≥12 για κάθε λ<0

Για να δείξουμε ότι η ελάχιστη τιμή του εμβαδού είναι 12 πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει λ<0 ώστε Ε(λ)=12.

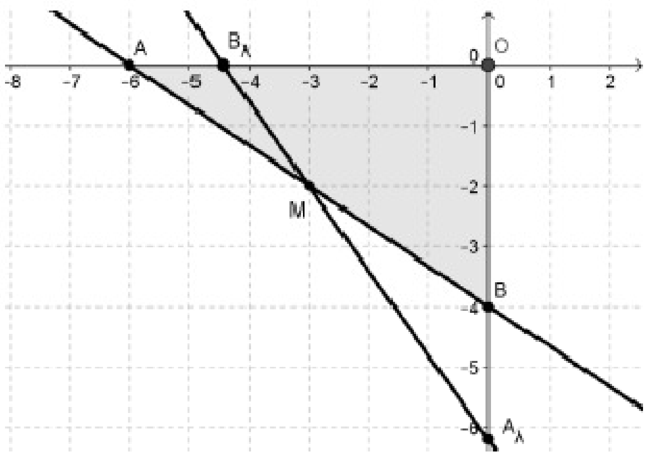
Λύνουμε την εξίσωση

$$E(\lambda)=12 \Leftrightarrow -\frac{(3\lambda-2)^2}{2\lambda}=12 \Leftrightarrow -\frac{9\lambda^2-12\lambda+4}{2\lambda}=12 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \lambda=-\frac{2}{3}$$

Άρα minE(λ)=12 για $\lambda=-\frac{2}{3}$

Τότε από τη σχέση (1) η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$y=-\frac{2}{3}x+3\left(-\frac{2}{3}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x-4$$



ΘΕΜΑ Δ14_22565

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3=0$

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 8)

Έστω ε_1: x+ y=1 και ε_2: x +y=3 οι δύο ευθείες.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β ώστε (ΑΒ)=2.

Λύση

α) Έχουμε:

$$x^2+y^2+2(xy-2x-2y)+3=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2+2xy)-4(x+y)+3=0$$

$$(x+y)^2-4(x+y)+3=0 \Leftrightarrow (x+y)^2-4(x+y)+4-1=0$$

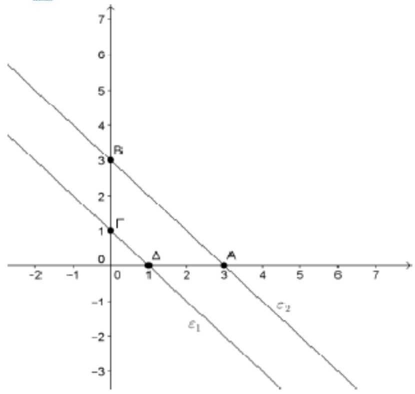
$$(x+y)^2-4(x+y)+4-1=0 \Leftrightarrow (x+y-2)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+y-2-1)(x+y-2+1)=0$$

$$(x+y-3)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0 \text{ ή } x+y-1=0$$

Άρα προκύπτουν οι ευθείες με εξισώσεις ε_1:y=–x+1 και ε_2:y=–x +3 που είναι παράλληλες μεταξύ τους γιατί έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης ($\lambda_1=\lambda_2=-1$)

β) Η ε_1 τέμνει τους άξονες στα σημεία Γ(0, 1) και Δ(1, 0) ενώ η ε_2 στα Α(3, 0) και Β(0, 3). Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι το ζητούμενο εμβαδό είναι το (ΑΒΓΔ) για το οποίο ισχύει:

$$(ΑΒΓΔ)=(ΟΑΒ)-(ΟΓΔ)=\frac{3\cdot 3}{2}-\frac{1\cdot 1}{2}=4 \text{ τ.μ.}$$



γ) Από το Ο(0, 0) διέρχεται η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση x=0. Η ευθεία αυτή επαληθεύει την υπόθεση του ερωτήματος γιατί τέμνει τις ευθείες ε_1, ε_2 στα σημεία Γ, Β και είναι (ΓΒ)=2.

Κάθε άλλη ευθεία ε που διέρχεται από το Ο(0, 0) έχει εξίσωση ε: y=λx, $\lambda \neq -1$ (γιατί για λ=–1 η ε θα είναι παράλληλη με τις άλλες δύο ευθείες)

Για y=λx, η ε_1 γράφεται $(\lambda+1)x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda+1}$ και $y=\frac{\lambda}{\lambda+1}$

Άρα οι ευθείες ε, ε_1 τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{1}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι και οι ευθείες ε, ε_2 τέμνονται στο σημείο $B\left(\frac{3}{\lambda+1},\frac{3\lambda}{\lambda+1}\right)$.

Τότε $(AB)=2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{(\lambda+1)^2}+\frac{4\lambda^2}{(\lambda+1)^2}}=2 \Leftrightarrow \frac{4(\lambda^2+1)}{\lambda^2+2\lambda+1}=4 \Leftrightarrow \lambda=0$.

Άρα ε: y=0.

Επομένως οι ζητούμενες ευθείες είναι οι ε: y=0 και ε΄: x=0

ΘΕΜΑ Δ15_22568

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x, y), A(–1, 3) και B(2, –1) ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν (MAB)=4.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι δύο ευθείες ε_1, ε_2 παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την απόσταση των ε_1, ε_2.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B είναι η μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2. Πώς αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό;

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AM}=(x+1,y-3)$ και $\overrightarrow{AB}=(2+1,-1-3)=(3,-4)$, άρα

$$\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} x+1 & y-3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-4(x+1)-3(y-3)=-4x-3y+5$$

Και $(MAB)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\frac{1}{2}|-4x-3y+5|$, αλλά

$$(MAB)=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}|-4x-3y+5|=4\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 4x+3y-13=0 \text{ ή } 4x+3y+3=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι οι ευθείες με εξισώσεις ε_1: 4x + 3y – 13=0 και ε_2:4x+3y + 3=0 που είναι παράλληλες αφού και οι δύο έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{4}{3}$

β) Βρίσκω ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ε_2: 4x + 3y + 3=0

Για x=2 είναι: $8+3y+3=0\Leftrightarrow y=-\frac{11}{3}$

Άρα το $\Gamma\left(2,\ -\frac{11}{3}\right)$ είναι σημείο της ε_2, τότε:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=d(\Gamma,\varepsilon_1)=\frac{\left|4\cdot 2+3\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)+(-13)\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{16}{5}$$

γ) Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα A, B τότε: $\lambda_\varepsilon=\frac{3-(-1)}{-1-2}=-\frac{4}{3}$

δηλαδή είναι παράλληλη προς τις ε_1, ε_2 αφού και οι τρεις έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Ακόμα $d(A,\varepsilon_1)=\frac{|-4+9-13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}=\frac{d(\varepsilon_2,\varepsilon_1)}{2}$

οπότε η ευθεία AB είναι μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2.

Άρα ε: $y-y_0=\lambda\,(x-x_0)$. Από A(–1, 3) και $\varepsilon_\lambda=-\frac{4}{3}$ έχουμε

Υπολογίζω την $d(A,\varepsilon_1)=\frac{|-4+9+3|}{\sqrt{16+9}}=\frac{8}{5}$ και $d(A,\varepsilon_2)=\frac{|-4+9-13|}{\sqrt{16+9}}=\frac{8}{5}$.

Επειδή $\varepsilon 5 \varepsilon_1 5 \varepsilon_2$ και ένα σημείο της (ε) το Α ισαπέχει από τις ευθείες ε_1 και ε_2 τότε η (ε) θα είναι η μεσοπαράλληλη των ευθειών ε_1 και ε_2.

Η ευθεία ε που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $\varepsilon: y-3=-\frac{4}{3}(x+1) \Leftrightarrow 3y+4x-5=0$

Έστω Μ σημείο της μεσοπαράλληλης τότε θα ισχύει

$$d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2) \Leftrightarrow \frac{|4x+3y-13|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|4x+3y+3|}{\sqrt{4^2+3^2}} \Leftrightarrow |4x+3y-13|=|4x+3y+3| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4x+3y-5=0$$

Άρα η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β είναι όντως η μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2.

ΘΕΜΑ Δ16_22571

Δίνονται τα σημεία Α(1, 2), Β(–3, 4) και Γ(2λ +1, 1 –λ), $\lambda \in R$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(-4,2)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(2\lambda,-\lambda-1)$. Άρα

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2\lambda & -\lambda-1\end{vmatrix}=-4\lambda+4-4\lambda=4\neq 0$$

Άρα $\overrightarrow{AB}$ μη παράλληλο με $\overrightarrow{A\Gamma}$ δηλαδή τα Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

Ακόμα $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})\right|=\frac{1}{2}\cdot 4=2\tau\mu$. Άρα το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι σταθερό.

β) Έστω Γ(x, y). Τότε x=2λ+1 και y=1–λ.

Θα έχουμε λ=1–y και x=2(1–y)+1 ή x +2y–3=0

Άρα το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: x+2y– 3=0

Επίσης, $\lambda_{AB}=-\frac{1}{2}=\lambda_\varepsilon$

Δηλαδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ.

γ) Επειδή τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ θα είναι $\hat{A}=90^\circ$.

Άρα $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=0 \Leftrightarrow -4\cdot 2\lambda+2(-\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{5}$$

ΘΕΜΑ Δ17_22577

Σε ορθοκανονικό σύστημα Οxy θεωρούμε τις ευθείες:

$$\varepsilon_\lambda: x + (\lambda +2)y - \lambda +1 =0, \ \lambda \in R$$

α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο Μ.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_\lambda) \le \sqrt{10}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει από τη μέγιστη απόσταση από το Ο.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι:

$$\varepsilon_\lambda: x + (\lambda +2)y - \lambda+1=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x + 2y + 1- \lambda(y-1)=0 \ \ (1)$$

Για να δείξουμε ότι όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, αρκεί να βρούμε ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ του οποίου οι συντεταγμένες να επαληθεύουν την (1) για όλες τις τιμές του λ. Το ζητούμενο σημείο είναι εκείνο του οποίου οι συντεταγμένες μηδενίζουν τις παραστάσεις x +2y +1 και y – 1, δηλαδή η λύση του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} x+2y+14&=0 \\ y-1&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-3,1)$$

Άρα όλες οι ευθείες της οικογένειας (1) διέρχονται από το Μ(–3, 1).

β) Έχουμε $d(O,\varepsilon_\lambda)=\dfrac{|1-\lambda|}{\sqrt{1+(\lambda+2)^2}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{|1-\lambda|}{\sqrt{1+(\lambda+2)^2}} \le 10 \Leftrightarrow |1-\lambda| \le \sqrt{10}\sqrt{1+(\lambda+2)^2} \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 \le 10\left[1+(\lambda+2)^2\right] \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (3\lambda+7)^2 \ge 0$$

που ισχύει.

γ) Θα πρέπει $d(O, \varepsilon_\lambda)= \sqrt{10}$

Άρα $\dfrac{|1-\lambda|}{\sqrt{1+(\lambda+2)^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow (3\lambda+7)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{7}{3}$

Για $\lambda = -\dfrac{7}{3}$

η ευθεία ε έχει εξίσωση: $x+\left(-\dfrac{7}{3}+2\right)y+\dfrac{7}{3}+1=0 \Leftrightarrow 3x-y+10=0$

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ - Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β1 _20060

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,-1)$ και $\vec{\beta}=(3,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u}=4\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\vec{u}^2}{5}$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(1,\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\right)$

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Έχουμε:

$$\vec{u}=4\vec{\alpha}-\frac{1}{3}\vec{\beta}=4\cdot(1,-1)-\frac{1}{3}(3,0)=(3,-4)$$

β) Είναι $\frac{\vec{u}^2}{5}=\frac{|\vec{u}|^2}{5}=\frac{\sqrt{9+16}^2}{5}=5$

Επίσης $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1\cdot3+(-1)\cdot0=3$

Άρα θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης 5 και διέρχεται από το σημείο Α(1, 5). Είναι:

$$y-5=5(x-1)\Leftrightarrow y=5x$$

ΘΕΜΑ Β2 _20068

Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(–5, 4), Β(–1, 6), Γ(4, 1) και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ (Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4,\frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Είναι $\overrightarrow{AB}=(4,2)$

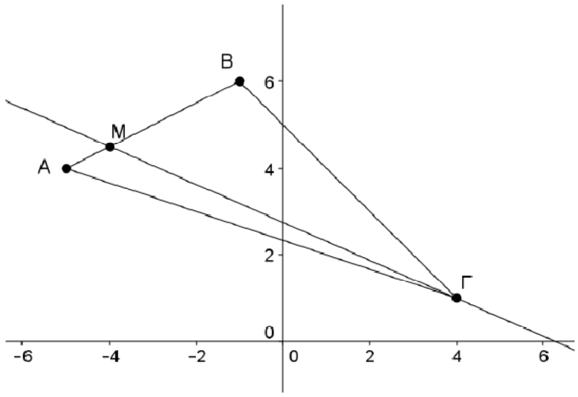
β) Έχουμε: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}(4,2)=(1,\frac{1}{2})$. Όμως, $\overrightarrow{AM}=(x_M+5,y_M-4)$

Άρα $x_M+5=1\Leftrightarrow x_M=-4$ και $y_M-4=\frac{1}{2}\Leftrightarrow y_M=\frac{9}{2}$. Επομένως, $M\left(-4,\frac{9}{2}\right)$.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ΓΜ είναι: $\lambda=\dfrac{\frac{9}{2}-1}{-4-4}=-\dfrac{7}{16}$

Άρα η εξίσωση της ΓΜ είναι:

$$y-1=-\frac{7}{16}(x-4)\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 7x+16y+44=0$$



ΘΕΜΑ Β3 _22521

Θεωρούμε τα σημεία Α(λ+1, 2λ), Β(2–λ, 4) και Γ(–1, 2), $\lambda \in \Re$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ, τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο.

(Μονάδες 10)

β) Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει (ΑΒΓ)=3.

i) Να αποδείξετε ότι λ=1 ή λ=2.

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$ όταν λ=1.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Για να σχηματίζουν τα σημεία Α, Β, Γ τρίγωνο για κάθε πραγματικό αριθμό λ θα πρέπει να μην είναι συνευθειακά δηλαδή θα πρέπει τα διανύσματα $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ να μη είναι παράλληλα επομένως να ισχύει $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

Είναι $\overrightarrow{AB}=(1-2\lambda,4-2\lambda)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(-2-\lambda,2-2\lambda)$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}1-2\lambda & 4-2\lambda\\ -2-\lambda & 2-2\lambda\end{vmatrix}=(1-2\lambda)(2-2\lambda)-(4-2\lambda)(-2-\lambda)=\ldots=2\left(\lambda^2-3\lambda+5\right)\neq 0,$$

γιατί Δ=–11<0

Επομένως $\lambda^2-3\lambda+5>0$ για κάθε πραγματικό λ. Συνεπώς τα σημεία Α, Β, Γ σχηματίζουν τρίγωνο για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

β) i) Είναι:

$$(ΑΒΓΔ)=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{ΑΒ},\overrightarrow{ΑΓ}\right)\right|=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|2λ^2-6λ+10\right|=3 \Leftrightarrow \left|λ^2-3λ+5\right|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} λ^2-3λ+2=0 \\ \text{ή} \\ λ^2-3λ+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} λ=1 \text{ ή } λ=2 \\ \\ \text{αδύνατη} \end{cases} \Leftrightarrow λ=1 \text{ ή } λ=2$$

ii) Για λ=1 είναι Α(2,2), Β(1, 4), Γ(–1,2).

Επομένως $\overrightarrow{ΓΑ}=(2,2)$.

Επίσης έχουμε:

$$\overrightarrow{ΓΑ}\cdot\overrightarrow{ΓΒ}=\left|\overrightarrow{ΓΑ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ΓΒ}\right|\cdot συν\left(\widehat{\overrightarrow{ΓΑ}\cdot\overrightarrow{ΓΒ}}\right) \Leftrightarrow συν\left(\widehat{\overrightarrow{ΓΑ}\cdot\overrightarrow{ΓΒ}}\right)=\frac{\overrightarrow{ΓΑ}\cdot\overrightarrow{ΓΒ}}{\left|\overrightarrow{ΓΑ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ΓΒ}\right|}=\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $συν\left(\widehat{\overrightarrow{ΓΑ}\cdot\overrightarrow{ΓΒ}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και επομένως η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΓΑ},\overrightarrow{ΓΒ}$ ισούται με $\frac{π}{4}$.

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ - Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1 18617

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{b}$ με μέτρα 2 , 6 αντίστοιχα και $\varphi \in [0,\pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{\alpha}\vec{b}+12)x+(\vec{\alpha}\vec{b}-12)\psi-5=0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\varphi \in [0,\pi]$.

(Μονάδες 3)

β) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα ψ΄ψ, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=3\vec{\alpha}$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ, να αποδείξετε ότι $\vec{b}=-3\vec{\alpha}$

(Μονάδες 7)

δ) Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{b}\perp\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Είναι της μορφής Αx + Βψ+Γ=0 με $A=\vec{\alpha}\vec{b}+12$, $B=\vec{\alpha}\vec{b}-12$ και Γ=-5 και για κάθε $\varphi \in [0, \pi]$ δεν είναι συγχρόνως Α=0 και Β=0.

> Έστω ευθεία (ε) με εξίσωση:
> Αχ+Βψ+Γ=0
> με Α≠ 0 ή Β ≠0
> - (ε)//ψ΄ψ⇔Β=0
> - (ε)//χ΄χ ⇔Α=0
> - Είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{A}{B}$ (Β≠0)

β) Αν είναι παράλληλη στον ψ΄ψ θα πρέπει

$B=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}=12 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{b}|\sigma\upsilon\nu\varphi=12 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=1 \Leftrightarrow \varphi=0$.

Άρα $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{\alpha}$, άρα $\vec{b}=\lambda\vec{\alpha}$ με λ>0.

Όμως $|\vec{b}|=3|\vec{\alpha}|$ δηλαδή $|\lambda|=3 \Leftrightarrow \lambda=3$ (λ>0).

Άρα $\vec{b}=3\vec{\alpha}$

γ) Αν είναι παράλληλη στον χ΄χ θα πρέπει

$A=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}=-12 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{b}|\sigma\upsilon\nu\varphi=-12 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi=-1 \Leftrightarrow \varphi=\pi$.

Άρα $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$, άρα $\vec{b}=\lambda\vec{\alpha}$ με λ<0.

Όμως $|\vec{b}|=3|\vec{\alpha}|$ δηλαδή $|\lambda|=3 \Leftrightarrow \lambda=-3$ (λ<0).

Άρα $\vec{b}=-3\vec{\alpha}$

δ) Η εξίσωση της διχοτόμου είναι ψ=χ και έχει κλίση λ_1=1. Άρα θα πρέπει και η κλίση της παραπάνω ευθείας να είναι λ_2=1. Όμως για $\vec{\alpha}\vec{b}\neq 12$ είναι:

$$\lambda_2=-\frac{\vec{\alpha}\vec{b}+12}{\vec{\alpha}\vec{b}-12}=1 \Leftrightarrow -\vec{\alpha}\vec{b}-12=\vec{\alpha}\vec{b}-12 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{b}$$

(Αν $\vec{\alpha}\vec{b}=12$ η ευθεία είναι παράλληλη στον ψ΄ψ από ερώτημα (β).)

ΘΕΜΑ Δ2 18622

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \Re$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \Re$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι (ΟΒΓ) =1 , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\mu-2,\frac{\mu-2}{2}\right)$

Θυμίζουμε ότι:
Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$
- $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\psi_2-\psi_1)$
- $\lambda_{AB}=\frac{\psi_2-\psi_1}{x_2-x_1}$ (Αν $\chi_1\neq\chi_2$)

β) $\lambda_{AB}=\frac{1}{2}$ Η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$\psi+1=\frac{1}{2}(x-2)\Leftrightarrow\psi=\frac{1}{2}x-2 \quad (1)$$

Πράγματι, οι συντεταγμένες του Γ επαληθεύουν την (1),
άρα για κάθε $\mu \in \Re$, το Γ ανήκει στην ΑΒ.

γ) $\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\mu\left(\mu-2,\frac{\mu-2}{2}\right)=-\left(1,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\mu^2-2\mu,\frac{\mu^2-2\mu}{2}\right)=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\mu^2-2\mu=-1\\ \text{και}\\ \frac{\mu^2-2\mu}{2}=\frac{-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\mu=1$$

δ) Για μ=1 είναι $\Gamma=\left(1,\frac{-3}{2}\right)$

$\overrightarrow{OB}=(2,-1)$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\left(1,-\frac{3}{2}\right)$

$$\det\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}=-\frac{6}{2}+1=-2,$$

Άρα $(OB\Gamma)=\frac{1}{2}|-2|=1$ τμ

ΘΕΜΑ Δ3 18623

Δίνονται τα σημεία Α(3,4) , Β(5,7) και Γ (2μ +1,3μ −2) , όπου $\mu \in \Re$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α , Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δεν εξαρτάται από το μ.

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;

(Μονάδες 5)

Λύση

α) $\overrightarrow{AB}=(2,3)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(2\mu-2,3\mu-6)$

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2\mu-2 & 3\mu-6 \end{vmatrix}=-6\neq 0$$

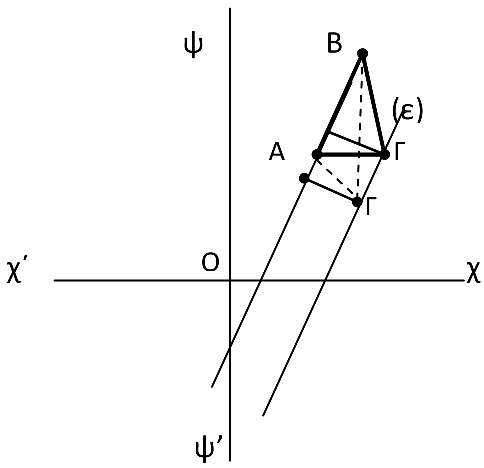
Άρα $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{A\Gamma}$, άρα τα σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

β) i) $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-6\right|=3$ τμ, δηλαδή ανεξάρτητο του μ.

ii) Αν Γ(χ, ψ), τότε: $\begin{cases} \chi=2\mu+1 \\ \psi=3\mu-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi=6\mu+3 \\ -2\psi=-6\mu+4 \end{cases}$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $3\chi-2\psi=7$

Άρα το Γ ανήκει στην παραπάνω ευθεία (ε)



γ) Είναι $\lambda_{AB}=\frac{3}{2}$ και $\lambda_{\varepsilon}=\frac{3}{2}$, δηλ. ΑΒ//ε.

Οπότε $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(AB)\cdot\upsilon$

Αλλά υ=d(Γ, AB)=d(AB, ε) που είναι σταθερή για κάθε σημείο Γ αφού ΑΒ//ε.

ΘΕΜΑ Δ4 18609

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda+1)$ όπου λ≠0 και λ≠ –2 και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\frac{2}{\lambda},-\lambda)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Ισχύει $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=..=\dfrac{(4\lambda,2\lambda)}{2}=(2\lambda,\lambda)$

β) Είναι $\overrightarrow{AM}\perp\vec{\alpha}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\vec{\alpha}=0\Leftrightarrow 2\lambda\dfrac{2}{\lambda}+\lambda(-\lambda)=0\Leftrightarrow 4-\lambda^2=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\lambda=\pm2$

Αφού λ≠ –2, τότε λ=2

γ) Για λ=2 είναι $\overrightarrow{AB}=(2,3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(6,1)$. Τότε:

$$(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|2-18|=\frac{1}{2}16=8\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ5 22588

Θεωρούμε τα σημεία Α(2, 2), Β(–1, 0) και Γ(0,2).

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) ώστε $\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2-2\overrightarrow{\Gamma M}^2=3$ είναι η ευθεία ε: x – 2y+1 =0.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i) Σημείο Κ στον άξονα x΄x ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα y΄y.

(Μονάδες 10)

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα y΄y.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Υπολογίζουμε αρχικά τις συντεταγμένες των τριών διανυσμάτων και έχουμε:

$$\overrightarrow{AM}=(x-2,y-2),\ \overrightarrow{BM}=(x+1,y),\ \overrightarrow{\Gamma M}=(x,y-2)$$

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2-2\overrightarrow{\Gamma M}^2=3\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\Gamma M}\right|^2=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2+(x+1)^2+y^2-2\left(x^2+(y-2)^2\right)=3\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x-2y+1=0$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) είναι η ευθεία: (ε): x–2y+1=0

β) i) Αφού το Κ ανήκει στον άξονα των x είναι της μορφής Κ(κ,0). Έστω Λ το συμμετρικό του Κ ως προς την (ε) του α) ερωτήματος. Όμως το Λ ανήκει στον άξονα των y΄y και είναι της μορφής Λ(0, λ).

Έστω ΚΜ $\perp$ ε. Τότε το Μ είναι μέσο του ΚΛ, οπότε είναι: $M\left(\frac{\kappa}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.

Έστω Δ το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα των x΄x, επομένως θα πρέπει Δ(–1,0). Αφού το Μ ανήκει στην (ε) επαληθεύει την εξίσωσή της, οπότε:

$$\frac{\kappa}{2}-2\frac{\lambda}{2}+1=0\Leftrightarrow \kappa=2(\lambda-1)$$

Επομένως $M\left(\lambda-1,\frac{\lambda}{2}\right)$ και Κ(2λ –2, 0)

Έχουμε $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{MK}$, όπου $\overrightarrow{AM}=\left(\lambda,\frac{\lambda}{2}\right)$, $\overrightarrow{MK}=\left(\lambda-1,-\frac{\lambda}{2}\right)$

Επομένως,

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MK}=0\Leftrightarrow\frac{3\lambda^2}{4}-\lambda=0\Leftrightarrow 3\lambda^2-4\lambda=0\Leftrightarrow\lambda(3\lambda-4)=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{4}{3}$, ή λ=0 απορ.

Οπότε $\kappa=2\left(\frac{4}{3}-1\right)\Leftrightarrow\kappa=\frac{2}{3}$

Έτσι έχουμε τις συντεταγμένες των σημείων: $K\left(\frac{2}{3},0\right)$, $\Lambda\left(0,\frac{4}{3}\right)$ και $M\left(\frac{1}{3},\frac{3}{3}\right)$.

ii) Αφού Σ είναι το σημείο τομής της (ε) με τον άξονα των y είναι: $\Sigma\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Είναι:

$$(K\Lambda\Sigma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{K\Lambda},\overrightarrow{K\Sigma}\right)\right| \text{ όπου } \overrightarrow{K\Lambda}=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right),\ \overrightarrow{K\Sigma}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$$

Άρα $(K\Lambda\Sigma)=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{K\Lambda},\overrightarrow{K\Sigma}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{2}{6}+\frac{8}{9}\right|=\frac{5}{18}$ τ.μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{Ο}}$: ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

§ 3.1: ΚΥΚΛΟΣ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β1_22507

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(0, –5) και ακτίνα ρ=3.

(Μονάδες 12)

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ 0 με Α=0, Β=10 και Γ=16

Είναι: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 36 > 0$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(0, –5) και ακτίνα ρ=3.

β) Όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) είναι οι:

ε_1: x=0(y΄, y)

$d(K, \varepsilon_1) = 0 \neq \rho$

επομένως η ε_1 δεν ικανοποιεί το ζητούμενο.

ε_2: $y - 0 = \lambda(x - 0)$, $\lambda \in \Re \Leftrightarrow y = \lambda x \Leftrightarrow \lambda x - y = 0$

Άρα

$$d(K, \varepsilon_2) = \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1)\cdot(-5) + 0|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{\lambda^2+1}}$$

Επίσης

$$d(K, \varepsilon_2) = \rho \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 3 \Leftrightarrow 3\sqrt{\lambda^2+1} = 5 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{4}{3}$$

Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι $y = \frac{4}{3}x$ και $y = -\frac{4}{3}x$

ΘΕΜΑ Β2_22508

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο Α(3, 10) και έχει κέντρο το Κ(4, 8).

α) Να αποδείξετε ότι: $C: (x-4)^2 + (y-8)^2 = 5$ και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Ο και Κ.

(Μονάδες 13)

β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:

i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων

(Μονάδες 6)

ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων

(Μονάδες 6)

Λύση

α) Είναι $\rho=(KA)=\sqrt{(3-4)^2+(10-8)^2}=\sqrt{5}$

Επομένως

$$C: (x-4)^2+(y-8)^2=5$$

$$\lambda_{OK}=\frac{8-0}{4-0}=\frac{8}{4}=2 \text{ επομένως } \varepsilon: y-0=2(x-0) \Leftrightarrow y=2x$$

β) Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} C:(x-4)^2+(y-8)^2=5 \\ \varepsilon: y=2x \end{cases}$

και βρίσκουμε τα σημεία τομής της ευθείας ε και του κύκλου C που είναι τα M(5, 10) και N(3, 6) με (OM)= ...= $5\sqrt{5}$ και (ON)= ...= $3\sqrt{5}$

Αφού (ON)<(OM) το σημείο που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το N, ενώ το σημείο που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το M.

ΘΕΜΑ Β3_22533

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία A(x, y), B(3, 2) και Γ(1, 0) . Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη *ΒΓ,* τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το Α κινείται στον κύκλο C :$(x-2)^2+(y-1)^2=2$

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)

Λύση

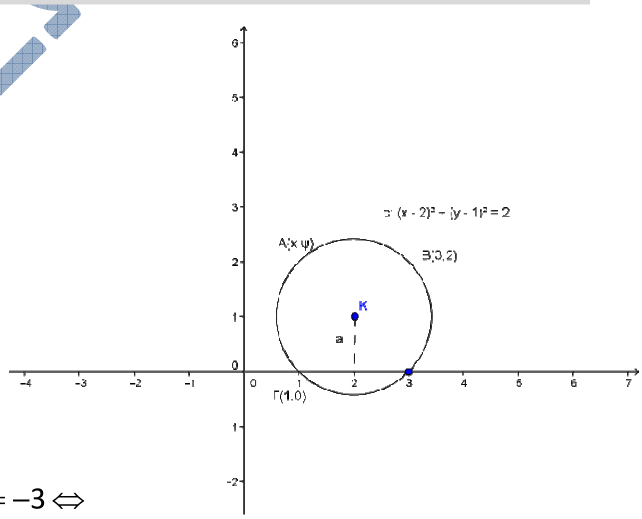
α) <u>α΄ τρόπος:</u>

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$(AB)^2+(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(\psi-2)^2+(x-1)^2+\psi^2=2^2+2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-2)^2+(\psi-1)^2=2$$



<u>β΄ τρόπος:</u>

$\overrightarrow{A\Gamma}=(1-x,-\psi)$ και $\overrightarrow{AB}=(3-x,2-\psi)$

$$\overrightarrow{A\Gamma}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow (1-x)(3-x)-\psi(2-\psi)=0$$

$$\Leftrightarrow 3-x-3x+x^2-2\psi+\psi^2=0 \Leftrightarrow x^2-4x+\psi^2-2\psi=-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(\psi-1)^2=2$$

<u>γ΄ τρόπος:</u>

Αφού ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΒΓ, τα σημεία Α κινούνται σε κύκλο με διάμετρο τη ΒΓ. Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο Κ της ΒΓ, δηλαδή Κ(2, 1) και $\rho=\frac{1}{2}(\Gamma B)=\sqrt{2}$ και άρα τα σημεία Α κινούνται στον κύκλο: $(x-2)^2+(\psi-1)^2=2$

β) <u>α΄ τρόπος:</u>

Θα πρέπει (ΑΓ)=(ΑΒ) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(\psi-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(\psi-2)^2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x+\psi=3$. Λύνουμε το (Σ) με την εξίσωση του κύκλου και βρίσκουμε Α(1, 2) ή Α(3, 0).

<u>β΄ τρόπος:</u>

Για να είναι ΑΒΓ ισοσκελές τα σημεία Α θα βρίσκονται στη μεσοκάθετο της διαμέτρου ΒΓ.

Είναι $\lambda_{ΒΓ}=1$ άρα $\lambda_{μεσ}=-1$. Άρα η μεσοκάθετος είναι: $\psi-1=-(x-2) \Leftrightarrow \psi=-x+3$

Από τη λύση του (Σ) με την εξίσωση του κύκλου βρίσκουμε Α(1, 2) ή Α(3, 0).

ΘΕΜΑ Β4_22534

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Κ(2, – 1) και Α(–6, 5).

α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο *Κ* που διέρχεται από το *Α,* έχει εξίσωση

$$C : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 100$$

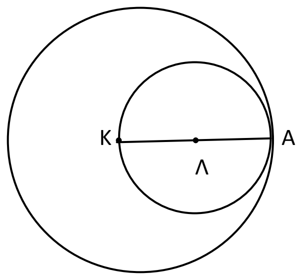
(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο *C* στο σημείο *Α* και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του *C.*

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι της μορφής $(x-x_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$ (1)



Κ(2, –1), άρα $x_0=2$, $\psi_0=-1$

$\rho=(ΚΑ)=\sqrt{(-6-2)^2+(5+1)^2}=10$

Άρα έχει εξίσωση: $(x-2)^2+(\psi+1)^2=10^2=100$

β) Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο Λ το μέσο της ΚΑ,

δηλαδή Λ(-2, 2) και ακτίνα $\rho'=\frac{1}{2}\rho=5$.

Άρα έχει εξίσωση $(x+2)^2+(\psi-2)^2=25$

ΘΕΜΑ Β5_22536

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Α(1, 0), Β(3, – 2) και την ευθεία $\varepsilon_1 : x + y + 1 = 0$. Να βρείτε:

α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος *ΑΒ*.

(Μονάδες 10)

β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία *Α, Β* και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε_1.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Αν Μ μέσο του ΑΒ, τότε Μ(2, –1)

$\lambda_{ΑΒ}=-1$, άρα $\lambda_{μεσ}=1$

Άρα η μεσοκάθετος έχει εξίσωση: $\psi+1=1(x-2) \Leftrightarrow \psi=x-3$

Θυμηθείτε ότι η μεσοκάθετος χορδής ΑΒ διέρχεται από το κέντρο του κύκλου

β) Η μεσοκάθετη της χορδής ΑΒ διέρχεται από το κέντρο Κ του κύκλου.

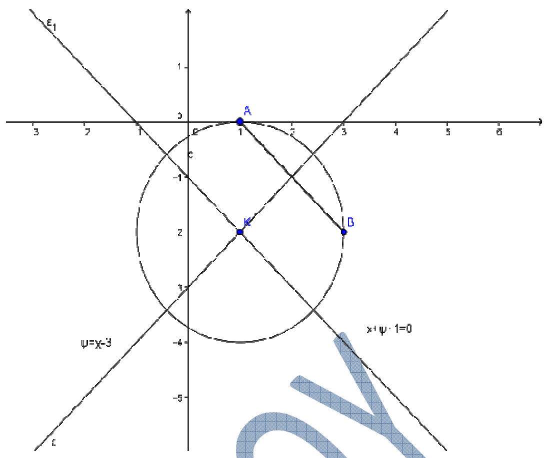
Έτσι λύνουμε το (Σ)

$$\begin{cases} \psi = x - 3 (\text{από ερώτημα α}) \\ x + \psi + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \psi = -2 \end{cases}$$

Άρα το κέντρο είναι Κ(1, – 2)

ρ=(ΚΑ)=2

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $(x-1)^2+(\psi+2)^2=4$



§ 3.1: ΚΥΚΛΟΣ

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1_22557

Έστω η εξίσωση $(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12$ (1), όπου $\lambda \in \Re$.

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy η εξίσωση (1) όταν λ=2 και τι όταν λ=6;

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2, 6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Οxy παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2, 6), να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Όταν λ =2 τότε η (1) γίνεται:

$$(x+4)^2+(y-4)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=4 \end{cases}$$

Άρα η (1) παριστάνει σημείο με συντεταγμένες (–4, 4).

Όταν λ=6 τότε η (1) γίνεται:

$$x^2+(y-12)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=12 \end{cases}$$

Άρα η (1) παριστάνει πάλι σημείο με συντεταγμένες (0, 12).

β) Έχουμε από την (1):

$$(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2+y^2+(12-2\lambda)x-4\lambda y+6\lambda^2-20\lambda+48=0$$

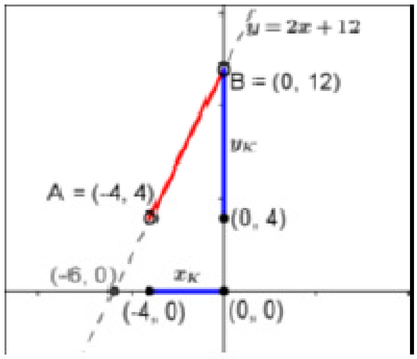
Για να παριστάνει κύκλο πρέπει:

$$A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow (12-2\lambda)^2+(-4\lambda)^2-4(6\lambda^2-20\lambda+48)>0 \Leftrightarrow \lambda^2-8\lambda+12<0 \Leftrightarrow 2<\lambda<6$$

γ) Άρα αφού για $\lambda \in (2, 6)$ παριστάνει κύκλο η εξίσωση (1), τότε το κέντρο του είναι Κ(λ–6, 2λ)

Άρα

$$\left.\begin{array}{l} x_\kappa = \lambda - 6 \\ y_\kappa = 2\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = x_\kappa + 6 \\ y_\kappa = 2(x_\kappa + 6) \end{array}\right\} \Leftrightarrow y_\kappa = 2x_\kappa + 12$$



Οπότε τα κέντρα των κύκλων ανήκουν στην ευθεία y= 2x + 12.

Όμως

$$2 < \lambda < 6 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2 < x_\kappa + 6 < 6 \\ 2 < \dfrac{y_\kappa}{2} < 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -4 < x_\kappa < 0 \\ 4 < y_\kappa < 12 \end{array}\right\}$$

Άρα τα κέντρα Κ των κύκλων ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, χωρίς τα άκρα Α(–4, 4) και Β(0, 12).

ΘΕΜΑ Δ2_22558

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τον κύκλο C_1: $x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του ΑΒ με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_2$

(Μονάδες 5)

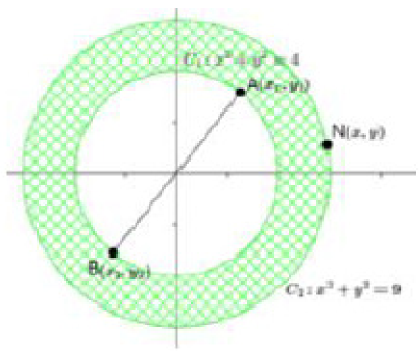
β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν(κ, λ) για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος C_2: $x^2 + y^2 = 9$

(Μονάδες 12)

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων του Μ(x, y) για τα οποία ισχύει $4 \le x^2 + y^2 \le 9$

(Μονάδες 8)

Λύση



α) Τα αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου C_1: $x^2 + y^2 = 4$ είναι συμμετρικά ως προς το Ο(0, 0) επειδή ο παραπάνω κύκλος έχει κέντρο του το Ο(0, 0). Άρα και τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ως σημεία μιας τυχαίας διαμέτρου του θα είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο των αξόνων.

Άρα $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_2$ (1)

β) **α΄ τρόπος**

Έστω Ν(κ, λ) σημείο του επιπέδου.

Τότε $\overrightarrow{NA} = (\kappa - x_1, \lambda - y_1)$ και $\overrightarrow{NB} = (\kappa - x_2, \lambda - y_2)$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 \overset{(1)}{=} x_1 \cdot (-x_1) + y_1(-y_2) = -x_1^{\ 2} - y_1^{\ 2} = -4 \qquad (2)$$

Άρα

$$\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5 \Leftrightarrow (\kappa - x_1) \cdot (\kappa - x_2) + (\lambda - y_1) \cdot (\lambda - y_2) = 5 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 = 9$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν είναι ο κύκλος C_2: $x^2 + y^2 = 9$.

β΄ τρόπος

Επειδή Ο μέσο ΑΒ έχουμε:

$$\overrightarrow{NA}\cdot\overrightarrow{NB}=5\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OB}\right)=5\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{OA}\right)=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{NO}^2-\overrightarrow{OA}^2=5\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{NO}\right|^2-2^2=5...=3$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων N είναι ο κύκλος C_2: $x^2+y^2=9$.

γ) Επειδή ισχύει $4\le x^2+y^2\le 9 \Leftrightarrow 2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3\Leftrightarrow 2\le(OM)\le 3\Leftrightarrow R_1\le(OM)\le R_2$

τα σημεία M(x, y) αποτελούν την περιοχή ανάμεσα στους κύκλους C_1 και C_2 συμπεριλαμβα-νομένων και των κύκλων αυτών.

ΘΕΜΑ Δ3_22581

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Μονάδες 8)

β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα x΄x και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους.

(Μονάδες 7)

γ) Το σημείο M(2, – 1) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία Α, Β ώστε η χορδή ΑΒ του κύκλου να έχει μέσο το Μ.

(Μονάδες 10)

Λύση

Έστω κύκλος με κέντρο $K(\chi_0,\psi_0)$ και ακτίνα ρ

- εφάπτεται στον χ΄χ $\Leftrightarrow$ d(K, χ΄χ)=$|\psi_0|$ =ρ
- εφάπτεται στον ψ΄ψ $\Leftrightarrow$ d(K, ψ΄ψ)=$|\chi_0|$ =ρ

α) Είναι Α=–2, Β=4 και Γ=1.

Θα πρέπει να ισχύει $A^2+B^2-4\Gamma>0$.

Πράγματι $A^2+B^2-4\Gamma=16>0$.

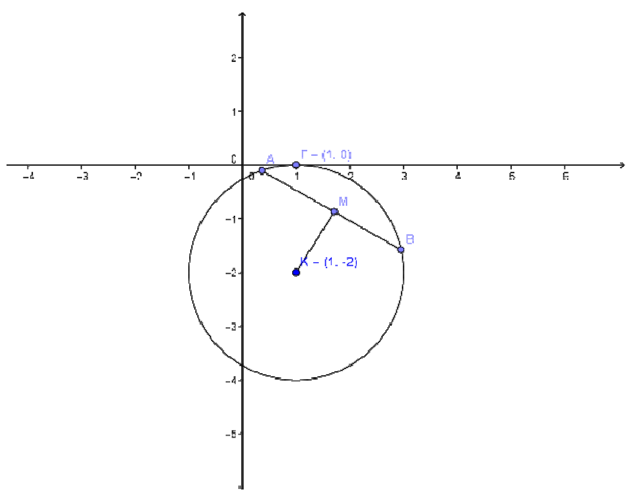
Το κέντρο είναι Κ(1, –2) και ρ=2

β) Είναι d(K, χ΄χ)=2=ρ, άρα εφάπτεται του χ΄χ στο σημείο Γ(1, 0).

γ) Είναι (ΜΚ)=…= $\sqrt{2}$ <2=ρ, άρα Μ εσωτερικό σημείο του κύκλου.

$\lambda_{MK}=1$, όμως $MK\perp AB$, άρα $\lambda_{AB}=-1$.

Άρα η εξίσωση είναι: $\psi+1=-1(x-2)\Leftrightarrow\psi=-x+1$



ΘΕΜΑ Δ4_22584

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy \ (1) \text{ και } (\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0 \ (2) \ \lambda \in \Re$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \Re$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω Α και Β τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία ΑΒ να προκύπτει από την εξίσωση (2).

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Η (1) ισοδύναμα γράφεται $(x+y)^2 - 1^2 = 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Άρα παριστάνει κύκλο C με κέντρο Ο(0, 0) και ακτίνας R=1 (μοναδιαίος κύκλος).

β) Είναι $\begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ 2\lambda + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$

Δηλαδή οι συντελεστές των x, y της ευθείας δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, άρα η (1) παραστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \Re$.

<u>α΄ τρόπος</u>

Η (2) ισοδύναμα γράφεται:

$\lambda x - x + 2\lambda y + 3y + 2\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda(x + 2y + 2) + (-x + 3y - 5) = 0$ για κάθε $\lambda \in \Re$.

Δηλαδή ως πολυώνυμο του λ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα πρέπει

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ -x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \underset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -2y - 2 \\ 5y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\dfrac{3}{5} - 2 \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-16}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Άρα το σημείο $M\left(\dfrac{-16}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ είναι το σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες της (2) αφού την επαληθεύει για κάθε $\lambda \in \Re$.

<u>β΄τρόπος</u>

Για λ=1 η (2): $5y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{5}$ και

για $\lambda = \dfrac{-3}{2}$ η (2): $\dfrac{-5}{2}x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-16}{5}$

Άρα το σημείο $M\left(\dfrac{-16}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ είναι το σημείο που διέρχονται όλες οι ευθείες της (2) αφού την επαληθεύει για κάθε $\lambda \in \Re$.

Πράγματι

$$(\lambda - 1)\left(\frac{-16}{5}\right) + (2\lambda + 3)\frac{3}{5} + 2\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow -16\lambda + 16 + 6\lambda + 9 + 10\lambda - 25 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

γ) **α΄ τρόπος**

Τα σημεία που ο C τέμνει τους άξονες είναι Α(1, 0) και Β(0, 1).

Αν υπάρχει $\lambda\in\Re$ ώστε η ΑΒ να προκύπτει από τη (2), πρέπει να επαληθεύεται για το ίδιο λ από τα Α και Β.

Δηλαδή,

για x=1, y=0 η (2) γίνεται: $\lambda - 1 + 2\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda=2$ και

για x=0, y=1 η (2) γίνεται: $2\lambda + 3 + 2\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda\in\Re$ ώστε η ΑΒ να προκύπτει από τη (2).

β΄ τρόπος

Η ΑΒ έχει εξίσωση $y - 0 = \frac{1-0}{0-1}(x-1) \Rightarrow y = -x + 1$

Έστω ότι η ΑΒ ορίζεται από τη (2).

Οι ευθείες που ορίζονται από τη (2) διέρχονται από τη σημείο $M\left(\frac{-16}{5}, \frac{3}{5}\right)$ άρα και από την ΑΒ,

δηλαδή, $\frac{3}{5} = -\left(\frac{-16}{5}\right) + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{21}{5}$ που είναι **άτοπο.**

Άρα δεν υπάρχει $\lambda\in\Re$ ώστε η ΑΒ να προκύπτει από τη (2).

ΘΕΜΑ Δ5_22586

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, $\alpha\in\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\Re$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή Ο.

(Μονάδες 10)

β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν α = 2 και y = λx, $\lambda\in\Re$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο Α διαφορετικό από το Ο.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Α συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο Μ του τμήματος ΟΑ κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το Ο.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$ θα παριστάνει κύκλο αν

$(3\alpha + 2)^2 + 0^2 - 4(\alpha^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 9\alpha^2 + 12\alpha + -4\alpha^2 + 16 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5\alpha^2 + 12\alpha + 20 > 0, \text{ αληθής για κάθε } \alpha\in\Re$$

αφού το τριώνυμο $5\alpha^2 + 12\alpha + 20$ έχει $\Delta = 12^2 - 4\cdot 5\cdot 20 = -256 < 0$

Άρα παριστάνει κύκλο C κέντρου $K\left(\frac{3\alpha+2}{2}, 0\right)$ και ακτίνας $R = \frac{\sqrt{5\alpha^2 + 12\alpha + 20}}{2}$

Ακόμη ο C θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν (Γ=0)

$$\alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$$

β) i. Για α=2 ο C: $x^2 + y^2 - 8x=0$ έχει κέντρο Κ(4, 0) και ακτίνα R=4 και από το (α) ερώτημα διέρχεται από το O(0, 0).

Τα σημεία τομής της ευθείας ε: y= λx, $\lambda\in\Re$ και του κύκλου C έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x=0 \\ y=\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(\lambda x)^2-8x=0 \\ y=\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left[\left(1+\lambda^2\right)x-8\right]=0 \\ y=\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=\dfrac{8}{1+\lambda^2} \\ y=\lambda x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \text{ή} \begin{Bmatrix} x=\dfrac{8}{1+\lambda^2} \\ y=\dfrac{8\lambda}{1+\lambda^2} \end{Bmatrix}$$

Επειδή το Α είναι διαφορετικό από το Ο η λύση (x, y)=(0, 0) απορρίπτεται.

Άρα $A\left(\dfrac{8}{1+\lambda^2}, \dfrac{8\lambda}{1+\lambda^2}\right)$

ii. Το μέσον Μ του ΟΑ θα έχει συντεταγμένες $\left(\dfrac{\dfrac{8}{1+\lambda^2}+0}{2}, \dfrac{\dfrac{8\lambda}{1+\lambda^2}+0}{2}\right)$,

δηλαδή είναι $M\left(\dfrac{4}{1+\lambda^2}, \dfrac{4\lambda}{1+\lambda^2}\right)$, με $\lambda\in\Re$

Έστω $\begin{cases} x=\dfrac{4}{1+\lambda^2}\neq 0 \quad (1) \\ y=\dfrac{4\lambda}{1+\lambda^2} \quad (2) \end{cases}$ Άρα $\dfrac{y}{x}=\lambda$, τότε η (1) ισοδύναμα,

$$x=\frac{4}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2} \Leftrightarrow x+x\frac{y^2}{x^2}=4 \Leftrightarrow x+\frac{y^2}{x}=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=2^2$$

Άρα το σημείο Μ ανήκει σε κύκλο κέντρου Λ(2, 0) και ακτίνας ρ=2 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων αφού για x=0, y=0 είναι $(0-2)^2 + 0^2 = 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4$ αληθής.

ΘΕΜΑ Δ6_22587

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , θεωρούμε τα σημεία M(x, y) , A(−25, 0) και B(−1, 0) για τα οποία ισχύει: $\left|\overrightarrow{AM}\right|=5\left|\overrightarrow{BM}\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο C : $x^2 + y^2 = 25$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε το σημείο Σ(7, 1) .

i. Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C .

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Υπολογίζουμε αρχικά τα μέτρα των δύο διανυσμάτων και έχουμε:

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x+25)^2 + y^2} \text{ και } |\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

αντικαθιστούμε στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$|\overrightarrow{AM}| = 5|\overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow \sqrt{(x+25)^2 + y^2} = 5\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x+25)^2 + y^2 = 25\left((x+1)^2 + y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 50x + 625 + y^2 = 25x^2 + 50x + 25 + 25y^2 \Leftrightarrow 24x^2 + 24y^2 = 600 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$$

β) i) Υπολογίζουμε την απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο του κύκλου και τη συγκρίνουμε με την ακτίνα του.

$$|\overrightarrow{O\Sigma}| = \sqrt{(7-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} > 5$$

επομένως το σημείο Σ βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου.

ii) Έστω (x_1, y_1) σημείο του κύκλου, τότε η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου θα δίνεται από την εξίσωση $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = 25$, την οποία το σημείο Σ(7,1) την επαληθεύει. Επομένως,

$$x_1 \cdot 7 + y_1 \cdot 1 = 25 \Leftrightarrow y_1 = -7x_1 + 25$$

Το σημείο (x_1, y_1) επαληθεύει την εξίσωση του κύκλου, επομένως θα ισχύει:

$$x_1^2 + y_1^2 = 25 \Leftrightarrow x_1^2 + (-7x_1 + 25)^2 = 25 \Leftrightarrow x_1^2 + 49x_1^2 - 350x_1 + 625 - 25 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50x_1^2 - 350x_1 + 600 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 7x_1 + 12 = 0$$

από τη λύση της δευτεροβάθμιας βρίσκουμε $x_1 = 4$ ή $x_1 = 3$

Επομένως έχουμε αντίστοιχα $y_1 = -7 \cdot 4 + 25 \Leftrightarrow y_1 = -3$ ή $y_1 = -7 \cdot 3 + 25 \Leftrightarrow y_1 = 4$

Επομένως οι δύο εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Σ θα είναι οι:

$$\varepsilon_1: 4x - 3y = 25 \text{ και } \varepsilon_2: 3x + 4y = 25$$

από όπου βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχοι συντελεστές διεύθυνσης είναι:

$$\lambda_1 = -\frac{4}{-3} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{4}{3}, \lambda_2 = -\frac{3}{4}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1$$

Άρα οι δύο εφαπτομένες είναι μεταξύ τους κάθετες.

ΘΕΜΑ Δ7_22589

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία Μ(x, y) , Α(–2, 0) και Β(2, 0) ώστε να ισχύει

$$\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 3\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι ο κύκλος

$C: x^2 + y^2 = 20$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$

i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων Ο, είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

ii. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{M\Gamma} \cdot \overrightarrow{M\Delta}$ όταν το Μ κινείται στον κύκλο. (Μονάδες 5)

Λύση

α) Υπολογίζουμε αρχικά τις συντεταγμένες των δύο διανυσμάτων και έχουμε:

$$\overrightarrow{AM}=(x+2,y) \text{ και } \overrightarrow{BM}=(x-2,y)$$

Και στη συνέχεια το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=(x+2)(x-2)+y^2=x^2-4+y^2$$

Η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$\overrightarrow{AM}^2+\overrightarrow{BM}^2=3\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|^2+\left|\overrightarrow{BM}\right|^2=3\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2=3(x^2-4+y^2)\Leftrightarrow x^2+y^2=20$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(x, y) είναι ο κύκλος με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα ρ=$2\sqrt{5}$

β) i) Ισχύει: $\left(\frac{ΓΔ}{4}\right)^2=5\Leftrightarrow\frac{(ΓΔ)^2}{16}=5\Leftrightarrow(ΓΔ)^2=80\Leftrightarrow(ΓΔ)=4\sqrt{5}$

Παρατηρούμε ότι (ΓΔ)=2ρ και με δεδομένο το ότι τα Γ, Δ είναι σημεία του κύκλου, έχουμε ότι τα Γ και Δ είναι αντιδιαμετρικά. Επομένως τα σημεία Γ, Ο, Δ είναι συνευθειακά.

ii) Έστω Γ($x_Γ$, $y_Γ$), Δ($x_Δ$, $y_Δ$) και Μ(x, y). Από (i) τα Γ και Δ αντιδιαμετρικά, επομένως Ο μέσο του ΓΔ. Έτσι:

$$x_Γ+x_Δ=0\Leftrightarrow x_Δ=-x_Γ \text{ και } y_Γ+y_Δ=0\Leftrightarrow y_Δ=-y_Γ$$

Επομένως Δ($-x_Γ$, $-x_Γ$)

Είναι $\overrightarrow{MΓ}=(x_Γ-x,y_Γ-y)$ και $\overrightarrow{MΔ}=(-x_Δ-x,-y_Γ-y)$

Αφού Γ σημείο του κύκλου ισχύει η σχέση $x_Γ^2+y_Γ^2=20$

Είναι $\overrightarrow{MΓ}\cdot\overrightarrow{MΔ}=(x_Γ-x)\cdot(-x_Γ-x)+(y_Γ-y)\cdot(-y_Γ-y)=$

$$=-(x_Γ^2-x^2)-(y_Γ^2-y^2)=-(x_Γ^2+y_Γ^2)+(x^2+y^2)=-20+20=0$$

ΘΕΜΑ Δ8_22590

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-(λ-1)x-(λ-7)y+λ=0$, $λ\in\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $λ\neq5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν λ = 5 .

(Μονάδες 12)

β) Έστω C_1, C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν λ = 3 και λ = 9 αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Έχουμε Α= (–λ – 1), Β= – (λ – 7), Γ= λ. Άρα:

$A^2+B^2-4Γ=(λ-1)^2+(λ-7)^2-4λ=2λ^2-20λ+50=2(λ^2-10λ+25)=2(λ-5)^2$

Οπότε για κάθε $\lambda \in \Re - \{5\}$ παριστάνει κύκλο, με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(\frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-7}{2}\right)$$

και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \dfrac{|\lambda-5|\cdot\sqrt{2}}{2}$

Για λ=5, έχουμε:

$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ και $y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ και $y = -1$

δηλαδή είναι το σημείο (2, –1)

β) Ο κύκλος C_1 για λ = 3 έχει κέντρο $K_1(1, -2)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$, ενώ ο κύκλος C_2 για λ = 9 έχει κέντρο $K_2(4, 1)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2\sqrt{2}$.

i) Θα δείξουμε ότι: $(K_1K_2) = \rho_1 + \rho_2$

Έχουμε

$$(K_1K_2) = \sqrt{(4-1)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2\cdot 9} = 3\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \rho_1 + \rho_2$$

ii) Έχουμε

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+3=0 \\ x^2+y^2-8x-2y+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+3=0 \\ x^2-x^2+y^2-y^2-8x+2x-2y-4y+9-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+3=0 \\ -6x-6y+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x+4y+3=0 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(-x+1)^2-2x+4(-x+1)+3=0 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x+8=0 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2=0 \\ y=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των δύο κύκλων είναι το (2, –1).

§ 3.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β1_22511

Θεωρούμε την παραβολή C: $y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία ε: $x=\frac{p}{2}$, όπου p η παράμετρος της παραβολής C.

α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

(Μονάδες 10)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία Β και Γ, τότε:

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Β και Γ, καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων $ε_1$ και $ε_2$ της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα.

(Μονάδες 10)

ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των $ε_1$ και $ε_2$ ανήκει στη διευθετούσα της C.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η παραβολή με τύπο $y^2 = 2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα (δ): $x=-\frac{p}{2}$

Είναι C: $y^2 = 4x$ άρα $2p = 4 \Leftrightarrow p=2$

Οπότε η εστία είναι $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ άρα E(1, 0) και η διευθετούσα (δ): $x=-\frac{2}{2}$, άρα (δ): x= – 1

β) i) Είναι $ε: x=\frac{p}{2} \overset{p=2}{\Leftrightarrow} x=\frac{2}{2} \Leftrightarrow x=1$

Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y^2=4x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{4} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 2 \\ x=1 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής είναι το Β(1, –2) και Γ(1, 2)

Η εξίσωση της εφαπτομένης σ΄ ένα σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο $y \cdot y_1 = p\,(x + x_1)$

Άρα

- στο Β(1, –2) η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $ε_1$: y (–2)=2 (x +1) $\Leftrightarrow$ $ε_1$: x+ y +1 = 0
- στο Γ(1, 2) η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $ε_2$: y 2 = 2 (x +1) $\Leftrightarrow$ $ε_2$: x – y + 1 = 0

ii) Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών $ε_1$, $ε_2$ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους δηλαδή

$$+\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-1 \end{cases}$$
$$\overline{2x=-2 \Leftrightarrow x=-1}$$

Για x = –1, με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$x+y=-1 \overset{x=-1}{\Leftrightarrow} -1+y=-1 \Leftrightarrow y=0$$

Άρα το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων είναι Κ(–1, 0) που ανήκει στην διευθετούσα (δ): x = – 1.

ΘΕΜΑ Β2_22512

Δίνεται η εξίσωση $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές C_1: $y^2 = 4x$ και C_2: $y^2 = -4x$ και να βρείτε για κάθε μία από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της.

(Μονάδες 13)

β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Είναι $y^4 - 16x^2 = 0 \Leftrightarrow y^4 - (4x)^2 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 4x)(y^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 4x = 0$ ή $y^2 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow y^2 = 4x$ ή $y^2 = -4x$

Άρα η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές, τις C_1: $y^2 = 4x$ και C_2: $y^2 = -4x$

Η παραβολή με τύπο $y^2 = 2px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ και διευθετούσα (δ): $x = -\frac{p}{2}$

Είναι C_1: $y^2 = 4x$ άρα $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$

Οπότε η εστία είναι $E_1\left(\frac{2}{2},0\right)$ άρα $E_1(1, 0)$ και η διευθετούσα είναι (δ_1): $x = -\frac{2}{2}$, άρα (δ_1): $x = -1$

Είναι C_2: $y^2 = -4x$ άρα $2p = -4 \Leftrightarrow p = -2$

Άρα η εστία είναι $E_2\left(\frac{-2}{2},0\right)$ άρα $E_2(-1, 0)$ και η διευθετούσα είναι (δ_2): $x = -\frac{-2}{2}$, άρα (δ_2): $x = 1$

β) Το κέντρο K του κύκλου θα βρίσκεται στο μέσο του E_1E_2. Έχουμε:

$$x_K = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} \Leftrightarrow x_K = \frac{1+(-1)}{2} \Leftrightarrow x_K = 0\ ,\ y_K = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} \Leftrightarrow y_K = \frac{0+0}{2} \Leftrightarrow y_K = 0$$

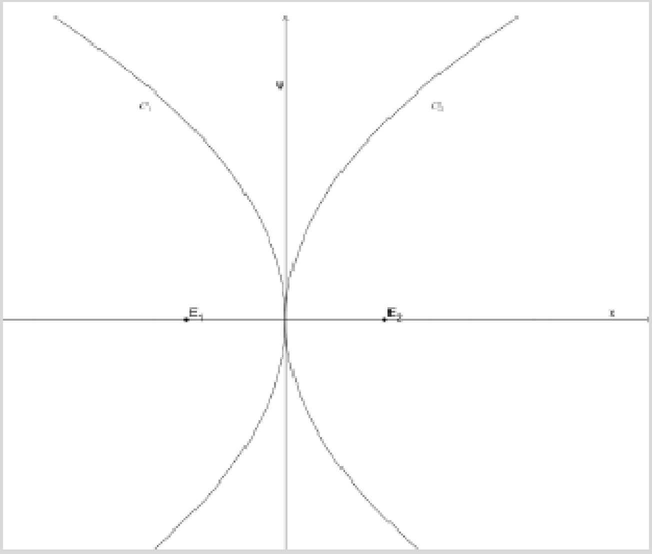
Άρα το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων O(0, 0) και θα έχει ακτίνα:

$$\rho = \frac{(E_1E_2)}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{(1(--1))^2 + (0-0)^2}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \rho = 1$$

Άρα C: $x^2 + y^2 = \rho^2 \overset{\rho=1}{\Leftrightarrow} C: x^2 + y^2 = 1$

ΘΕΜΑ Β3_22514

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές C_1: $y^2 = -2px$ και C_2: $y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.



α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμίας από τις παραβολές C_1 και C_2.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η παραβολή με τύπο C_1: $y^2 = -2px$ έχει εστία $E_1\left(-\frac{p}{2},0\right)$

Η παραβολή με τύπο C_2: $y^2 = 2px$ έχει εστία $E_2\left(\frac{p}{2},0\right)$

Επειδή η C_2 έχει εστία στο ημιάξονα Οx άρα p>0

$$(E_1E_2)=4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2},0\right)\right)^2+(0-0)^2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{p^2}=4 \overset{p>0}{\Leftrightarrow} p=4$$

Οπότε για p=4 είναι: $E_1\left(-\frac{4}{2},0\right)$ άρα $E_1(-2, 0)$

$E_2\left(\frac{4}{2},0\right)$ άρα $E_2(2, 0)$

Η παραβολή με τύπο C_1: $y^2 = -2px$ έχει διευθετούσα (δ_1): $x=-\frac{-p}{2} \overset{p=4}{\Leftrightarrow} (\delta_1): x=2$

Η παραβολή με τύπο C_2: $y^2 = 2px$ έχει διευθετούσα (δ_2): $x=-\frac{p}{2} \overset{p=4}{\Leftrightarrow} (\delta_2): x=-2$

Για p=4 είναι C_1: $y^2 = -8x$ και C_2: $y^2 = 8x$

β) Το κέντρο Κ του κύκλου θα βρίσκεται στο μέσο του E_1E_2. Έχουμε

$$x_K = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} \Leftrightarrow x_K = \frac{(-2)+2}{2} \Leftrightarrow x_K = 0 \ , \ \ y_K = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} \Leftrightarrow y_K = \frac{0+0}{2} \Leftrightarrow y_K = 0$$

Άρα το κέντρο του κύκλου είναι η αρχή των αξόνων O(0, 0) και θα έχει ακτίνα:

$$\rho = \frac{(E_1E_2)}{2} \Leftrightarrow \rho = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \rho = 2$$

Άρα C: $x^2 + y^2 = \rho^2 \overset{\rho=2}{\Leftrightarrow} C: x^2 + y^2 = 4$

§ 3.2 ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1_22559

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία ε: x – y – 1=0. Έστω επίσης Α(5, 3) και Β(1, 5) δύο σημεία του κύκλου C_1.

α) Να αποδείξετε ότι C_1: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1. (Μονάδες 7)

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2, τότε:

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1. (Μονάδες 4)

Λύση

α) Έστω $K(x_1, y_1) \in$ ε οπότε θα ισχύει $x_1 - y_1 - 1 = 0$ (1)

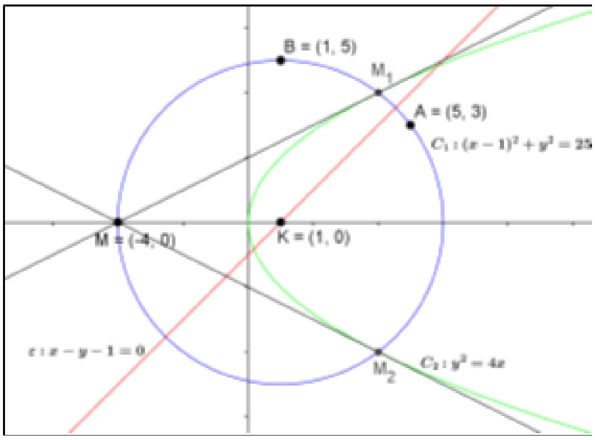
Επίσης ισχύει: $(KA) = (KB) \Rightarrow \sqrt{(x_1 - 5)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 5)^2} \Leftrightarrow 2x_1 - y_1 - 2 = 0$ (2)

Λύνοντας το (Σ) των (1), (2): $x_1=1$, $y_1=0$

Άρα το K(1, 0) αποτελεί κέντρο του κύκλου, ενώ ακτίνα αυτού είναι:

$$\rho = (KA) = \sqrt{(1-5)^2 + (0-3)^2} = 5$$

Οπότε ο ζητούμενος κύκλος είναι C_1: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$



β) Επειδή η εστία της παραβολής συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου, δηλαδή Ε(1, 0) και η κορυφή της είναι στην αρχή των αξόνων, τότε θα έχει εξίσωση της μορφής $y^2 = 2px$ με p=2. Άρα η παραβολή θα έχει εξίσωση C_2: $y^2 = 4x$

γ) Εφόσον τα M_1 και M_2 αποτελούν τα κοινά σημεία των C_1 και C_2 αντίστοιχα, τότε:

$$\left.\begin{array}{r}(x-1)^2+y^2=25\\ y^2=4x\end{array}\right\} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{r}(x-1)^2+4x=25\\ y^2=4x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x^2+2x-24=0\\ y^2=4x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}x_{1,2}=\left\langle\begin{array}{l}4\\ -6 \text{ απορ.}\end{array}\right.\\ y^2=4x\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}x=4\\ y=\pm 4\end{array}$$

Άρα θα έχουμε $M_1(4, 4)$ και $M_2(4, -4)$.

i) Η εφαπτομένη $ε_1$ της C_2: $y^2 = 4x$ στο $M_1(4, 4)$ έχει εξίσωση:

$$yy_1=4(x+x_1) \overset{x_1=4,y_1=4}{\Leftrightarrow} 4y=4(x+4) \Leftrightarrow x-y+4=0$$

Όμοια η εφαπτομένη $ε_2$ της στο $M_2(4, -4)$ έχει εξίσωση:

$$yy_1=4(x+x_1) \overset{x_1=4,y_1=-4}{\Leftrightarrow} -4y=4(x+4) \Leftrightarrow x+y+4=0$$

ii) Οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται στο σημείο Μ του οποίου οι συντεταγμένες είναι $\left.\begin{array}{l}x+y+4=0\\ x-y+4=0\end{array}\right\} \overset{+}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l}x=-4\\ y=0\end{array}\right\}$

Άρα το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών είναι το $M(-4, 0)$. Εξετάζουμε αν το σημείο αυτό ανήκει στον C_1: $(x-1)^2 + y^2 = 25$ αντικαθιστώντας τις τιμές των συντεταγμένων x και y. Οπότε θα έχουμε $(-4-1)^2 + 0^2 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$. Άρα το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι σημείο του παραπάνω κύκλου.

ΘΕΜΑ Δ2_22560

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία Α(0,2) , Β(−2,4) και Γ (0,6) .

α) Να αποδείξετε ότι C: $x^2 + (y-4)^2 = 4$.

(Μονάδες 10)

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C .

(Μονάδες 9)

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2

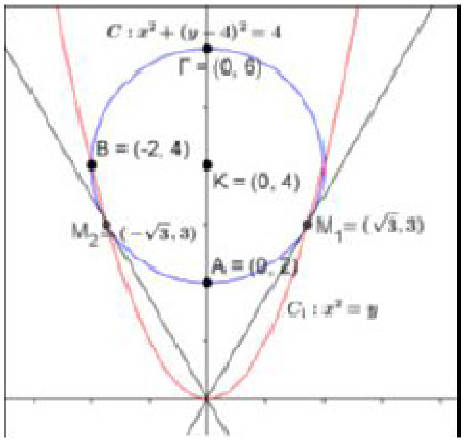
(Μονάδες 6)

Λύση

α) Έστω $K(x_K, y_K)$ το κέντρο του κύκλου C. Τότε θα ισχύει:

$$(KA)=(KB)=(KΓ) \Leftrightarrow \sqrt{x_K^2+(y_K-2)^2}=\sqrt{(x_K+2)^2+(y_K-4)^2}=\sqrt{x_K^2+(y_K-6)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{c}x_K^2+(y_K-2)^2=x_K^2+(y_K-6)^2\\ \text{και}\\ x_K^2+(y_K-2)^2=(x_K+2)^2+(y_K-4)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}y_K-2=\pm(y_K-6)\\ \text{και}\\ 4y_K-4x_K=16\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y_K=4\\ \\ x_K=0\end{array}\right.$$



Άρα το κέντρο του κύκλου είναι το Κ(0,4) και η ακτίνα του είναι:

$$\rho = (\text{KA}) = \sqrt{0^2 + (4-2)^2} = 2$$

Οπότε ο κύκλος θα έχει εξίσωση: C: $x^2 + (y-4)^2 = 4$

β) Εφόσον οι εφαπτόμενες του κύκλου που αναζητούμε είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, τότε θα πρέπει να είναι της μορφής y = λ x (η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση x=0 δεν είναι εφαπτόμενη του κύκλου γιατί διέρχεται από το κέντρο του). Επίσης, αυτές οι ευθείες θα έχουν ένα κοινό σημείο με τον κύκλο C, οπότε:

$$\left\{\begin{matrix} y = \lambda x \\ \\ x2 + (y-4)^2 = 4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x^2 + (\lambda x - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow (1+\lambda)^2 x^2 - 8\lambda x + 12 = 0$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-8\lambda)^2 - 4(1+\lambda)^2 \cdot 12 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{3}$$

Άρα $4x^2 \pm 8\sqrt{3}\,x + 12 = 0$ με $\Delta = (\pm 8\sqrt{3}) - 4 \cdot 4 \cdot 12 = 0$

Οπότε $x_{1,2} = \dfrac{\pm 8\sqrt{3}}{8} = \pm\sqrt{3}$ και $\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 + (y-4)^2 = 4 \Leftrightarrow (y-4)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - 4 = \pm 1 \Leftrightarrow y = \left\langle \begin{matrix} 5 & \text{απορρίπτεται διότι στο } (\sqrt{3},5) \text{ η εφαπ/νη δεν διέρχεται από το } (0,0) \\ 3 & \end{matrix}\right.$$

Άρα $M_1(\sqrt{3}, 3)$ και $M_2(-\sqrt{3}, 3)$

Άρα οι εφαπτομένες του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι:

$$\varepsilon_1 : y = \sqrt{3}x \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : y = -\sqrt{3}x$$

γ) Εφόσον τα M_1 και M_2 είναι συμμετρικά ως προς τον y΄y και αποτελούν σημεία της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, τότε η εξίσωσή της θα είναι της μορφής: $C_1 : x^2 = 2py$

όμως $M_1 \in C_1$, τότε $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2p \cdot 3 \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$

Οπότε $C_1 : x^2 = y$

ΘΕΜΑ Δ3_23321

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία Α(–2, – 2) , Β(0, – 4) , την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω Μ(x, y) τυχαίο σημείο της παραβολής.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(\text{MAB}) = \dfrac{1}{4}\left(y^2 + 4y + 16\right)$ ii. $(\text{MAB}) = \geq 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ ώστε το εμβαδόν (ΜΑΒ) του τριγώνου ΜΑΒ να γίνεται ελάχιστο.

(Μονάδες 5)

γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν Μ(1, –2) . Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο Μ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΜΑΒ.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) i) Αν M(x, y) σημείο της παραβολής $C: y^2 = 4x \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = x$ τότε $M\left(\frac{y^2}{4}, y\right)$, $y \in \Re$

Ακόμη $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{y^2}{4} + 2, y + 2\right)$ και $\overrightarrow{AB} = (2, -2)$ οπότε:

$$(MAB) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \ldots = \frac{1}{4}\left(y^2 + 4y + 16\right)$$

Αφού $y^2 + 4y + 16 = y^2 + 4y + 4 + 12 = (y+2)^2 + 12 > 0$ για κάθε $y \in \Re$

ii) **α΄ τρόπος**

Από το (α(i)) ερώτημα

$$(MAB) = \frac{1}{4}\left[(y+2)^2 + 12\right] = \frac{(y+2)^2}{4} + 3 \geq 3 \text{ για κάθε } y \in \Re$$

και το = ισχύει μόνο για $y = -2$

β΄ τρόπος

Το τριώνυμο $f(y) = y^2 + 4y + 16$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $y_0 = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$,

το $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 16 = 12$. Άρα για κάθε $y \in \Re$ είναι

$$(MAB) = \frac{1}{4}\left(y^2 + 4y + 16\right) = \frac{1}{4} f(y) \geq \frac{1}{4} f(-2) = \frac{1}{4} 12 = 3$$

(Η κορυφή της παραβολής $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ είναι στο σημείο $y_0 = \frac{-\beta}{2 \cdot \alpha}$)

β) **α΄ τρόπος**

Το ελάχιστο εμβαδόν του τριγώνου MAB είναι 3, άρα

$$(MAB) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(y^2 + 4y + 16\right) = 3 \Leftrightarrow \left(y^2 + 4y + 16\right) = 12 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

Άρα για $y = -2$ είναι $M(1, -2)$

β΄ τρόπος

Το (MAB) γίνεται ελάχιστο όταν το τριώνυμο $f(y) = y^2 + 4y + 16$ γίνεται ελάχιστο, που γίνεται για $y = -2$. Οπότε $M(1, -2)$

γ) Η εφαπτομένη της παραβολής $C: y^2 = 4x$ με σταθερά $p = 2$, στο σημείο της $M(1, -2)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y(-2) = 2(x+1)$ $y = -x - 1$ και η AB έχει εξίσωση

$$AB = y - (-2) = \frac{-4 - (-2)}{0 - (-2)}\left(x - (-2)\right) \Leftrightarrow y = -x - 4$$

και είναι $\lambda_\varepsilon = -1 = \lambda_{AB}$ άρα ε//AB

§ 3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β1_22509

Δίνονται οι ελλείψεις C_1: $x^2 + 4y^2 = 20$ και C_2: $4x^2 + y^2 = 20$
α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο C: $x^2 + y^2 = 8$

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Έχουμε

$$C_1: x^2+4y^2=20 \overset{20}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1 \text{ με εκκεντρότητα } \varepsilon_1 := \frac{5}{20}=\frac{1}{4} \text{ και}$$

$$C_2: 4x^2+y^2=20 \overset{20}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{20}=1 \text{ με εκκεντρότητα } \varepsilon_2 := \frac{5}{20}=\frac{1}{4}$$

Άρα οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα.

β) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ελλείψεων:

$$\begin{cases} C_1: x^2+4y^2=20 \;\big|\cdot(-4) \\ C_2: 4x^2+y^2=20 \;\big|\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2-16y^2=-80 \\ 4x^2+y^2=20 \end{cases}$$

Επομένως $-15y^2 = -60 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$

Για $y_1 = 2$ έχουμε: $x_1 = \pm 2$

Για $y_2 = -2$ έχουμε: $x_2 = \pm 2$

Άρα τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 είναι

Κ(2, 2), Λ(–2, 2), Μ(2, –2), Ν(–2, –2)

τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 8$

ΘΕΜΑ Β2_22510

Δίνεται ο κύκλος C_1: $x^2 + y^2 = 20$, έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ και η κατακόρυφη ευθεία ε: x = 4.

Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ.

(Μονάδες 11)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο Δ, καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών.

(Μονάδες 14)

Λύση

α) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Γ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} C_1: x^2+y^2=20 \\ \varepsilon: x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{4} \\ x=4 \end{cases} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=2 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \Gamma(4,2)$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Δ λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} C_2: \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1 \\ \varepsilon: x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{1} \\ x=4 \end{cases} \overset{y>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta(4,1)$$

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων C_1: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon: x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο Γ είναι:

$$\varepsilon_1: x \cdot 4 + y \cdot 2 = 20 \Leftrightarrow \varepsilon_1: 2x + y = 10$$

Η εξίσωση της έλλειψης C $: \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{\alpha^2}+\frac{y \cdot y_1}{\beta^2}=1$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της έλλειψης C_2 στο σημείο Δ είναι:

$$\varepsilon_2: \frac{x \cdot 4}{20}+\frac{y \cdot 1}{5}=1 \Leftrightarrow \varepsilon_2: x+y=5$$

Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών ε_1, ε_2 λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους, δηλαδή

$$\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} 2x+y=10 \\ -x-y=-5 \end{cases}$$
$$x=5$$

Για x=5 με αντικατάσταση προκύπτει ότι: $x+y=5 \Leftrightarrow 5+y=5 \Leftrightarrow y=0$

Άρα το σημείο τομής των δύο εφαπτομένων είναι K(5, 0)

ΘΕΜΑ Β3_22516

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'\left(-\sqrt{5},0\right), E\left(\sqrt{5},0\right)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

(Μονάδες 10)

β) Αν Μ είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει ΜΕ΄=2 · ΜΕ, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΜΕ΄ και ΜΕ

(Μονάδες 9)

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία Ε΄ΜΕ είναι ορθή

(Μονάδες 6)

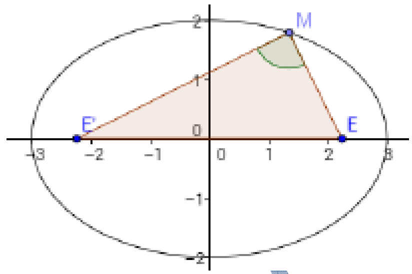
Λύση

α) Έχουμε $\gamma=\sqrt{5}$ και $2\alpha=6 \Leftrightarrow \alpha=3$

Επίσης $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}=\sqrt{3^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

Οι εστίες βρίσκονται στον άξονα x΄x άρα η έλλειψη θα έχει τη μορφή

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \text{ ή } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$



β) Ξέρουμε ότι ένα σημείο M του επιπέδου είναι σημείο έλλειψης αν και μόνο αν ME΄+ME=2 α

Από την υπόθεση έχουμε ότι ME΄=2ME οπότε:

ME΄+ME=2 α $\Leftrightarrow$ 2ME +ME =2· 3 $\Leftrightarrow$ 3ME =6 ME $\Leftrightarrow$ME=2

Επίσης ME΄=2 ·2 =4

Άρα ME =2 και ME΄ =4

γ) Παρατηρούμε ότι ισχύει

$(EE')^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2=4\cdot 5=20$ και $(ME)^2+(ME')^2=2^2+4^2=4+16=20$

Άρα το τρίγωνο Ε΄ΜΕ είναι ορθογώνιο και η γωνία Ε΄ΜΕ είναι ορθή.

§ 3.3 ΕΛΛΕΙΨΗ

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1_22592

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία M(x,y) για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}+\frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=0, \text{ όπου } A(-3,0) \text{ και } B(3,0).$$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1: x^2+y^2=25$

(Μονάδες 11)

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα x΄ x, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και εστίες τα σημεία A και B .

(Μονάδες 10)

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2

(Μονάδες 4)

Λύση

α) Έχουμε

$\overrightarrow{AM}=(x+3,y)$, $\overrightarrow{BM}=(x-3,y)$, $\overrightarrow{OA}=(-3,0)$, $\overrightarrow{OA}=(3,0)$

Άρα η δεδομένη σχέση γίνεται

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}+\frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=0 \Leftrightarrow (x-3,y)\cdot(x-3,y)+\frac{16}{9}(-3,0)\cdot(3,0)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2+y^2=25,$$

β) Για y=0 έχουμε $x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$, άρα τα σημεία τομής με τον άξονα x΄x είναι Γ(5, 0) και Δ(–5, 0).

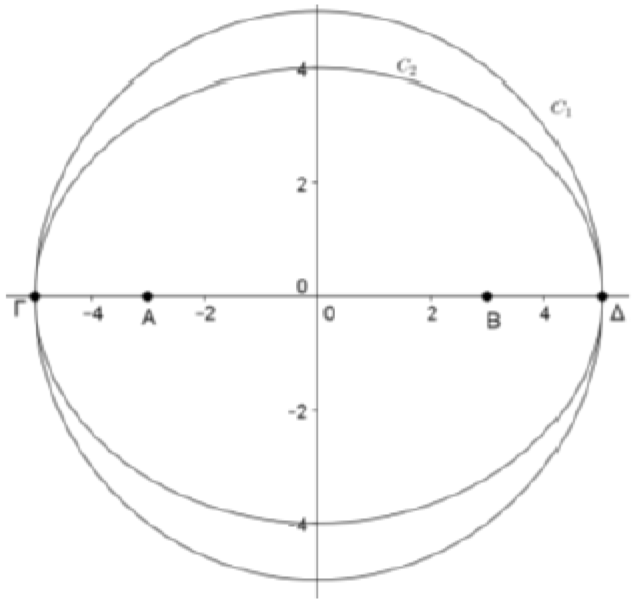
i) Έχουμε ΓΔ=2α $\Leftrightarrow$ 2α =10 $\Leftrightarrow$ α=5

Όμως

$$\gamma=3 \Leftrightarrow \gamma^2=9 \Rightarrow \alpha^2-\beta^2=9 \Leftrightarrow \beta^2=25-9 \Leftrightarrow \beta^2=16 \Leftrightarrow \beta=4$$

Άρα η εξίσωση της έλλειψης είναι $C_2: \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$,

ii) Η γραφική παράσταση του κύκλου C_1 και της έλλειψης C_2 είναι η παρακάτω



§ 3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ Β

ΘΕΜΑ Β1_22515

Μία έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή

$$C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $C_2: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

(Μονάδες 15)

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η υπερβολή $C_2: \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = 1$, $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$ έχει εστίες Ε΄(–γ, 0), Ε(γ, 0).

Άρα $C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ έχει

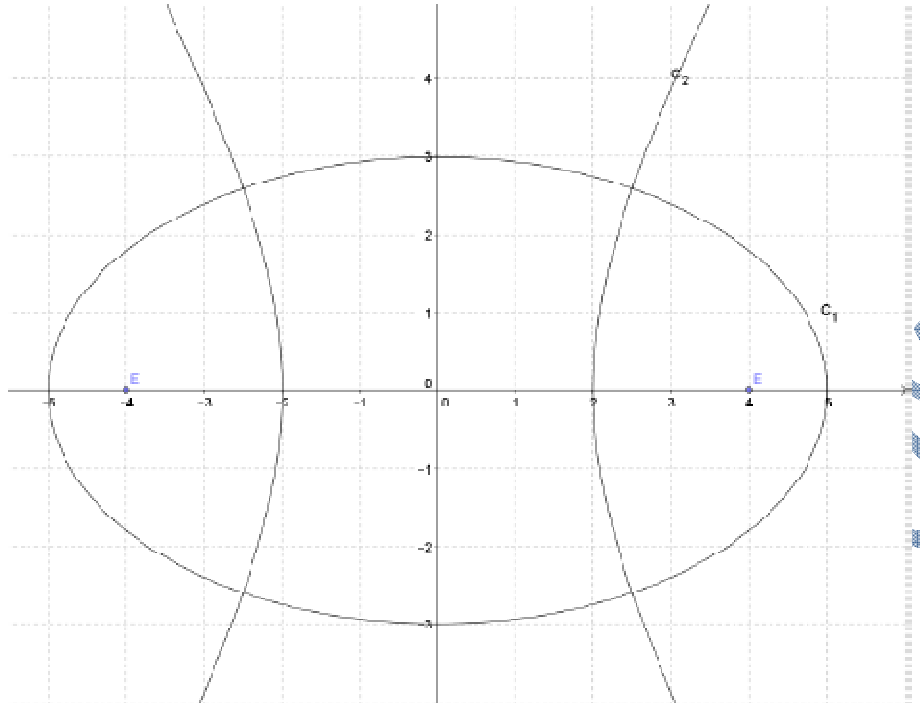
$$\sqrt{12} = \sqrt{\gamma^2 - 4} \Leftrightarrow 12 = \gamma^2 - 4 \Leftrightarrow \gamma^2 = 16 \Leftrightarrow \gamma = 4 \text{ με εστίες Ε΄(–4, 0), Ε(4, 0).}$$

Η εκκεντρότητα της έλλειψης δίνεται από τον τύπο $\varepsilon: \frac{\gamma}{\alpha}$ άρα $\frac{4}{5} = \frac{4}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = 5$

Επομένως $\beta = \sqrt{5^2 - 4^2} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{25 - 16} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{9} \Leftrightarrow \beta = 3$

Οπότε $C_2: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow C_2: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

β)



§ 3.4 ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ Δ1_22591

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α΄(-2, 0) , Α(2, 0) και διέρχεται από το σημείο Γ $\left(2\sqrt{5},2\right)$ είναι η $C_1:\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα Α΄Α.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: x=-2$ και $\varepsilon_2: x=2$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η εξίσωση της υπερβολής που έχει κορυφές Α΄(–2, 0), Α(2, 0) στον άξονα x΄x πρέπει α=2.

Άρα $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$

Όμως το σημείο Γ($2\sqrt{5}$,2) ανήκει στην υπερβολή, άρα:

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{2^2}-\frac{2^2}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\frac{20}{4}-\frac{4}{\beta^2}=1\Leftrightarrow\beta^2=1\Leftrightarrow\beta=1,\beta>0$$

Οπότε $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

β)Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $O\left(\frac{2-2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ δηλ. O(0, 0) και ακτίνα

$\rho = \frac{(A'A)}{2} = (OA) = 2$, άρα η εξίσωση του κύκλου είναι C_2: $x^2 + y^2 = 2^2$

γ) Έστω $(x_1, y_1) \in C_1$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την υπερβολή C_1. Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{xx_1}{4} - yy_1 = 1 \Leftrightarrow x_1x - 4y_1y - 4 = 0 \ (\varepsilon)$$

Για να εφάπτεται η ευθεία (ε) στον κύκλο C_2 πρέπει:

$$d(O,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0x_1 - 4y_1 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{x_1^2 + (4y_1)^2}} = 2 \Leftrightarrow 4 = 2\sqrt{x_1^2 + (4y_1)^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4 = x_1^2 + 16y_1^2 \ (1)$$

Όμως το $(x_1, y_1) \in C_1$ άρα:

$$\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 = 4y_1^2 + 4 \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$4 = 4y_1^2 + 4 + 16y_1^2 \Leftrightarrow 20y_1^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0$$

Οπότε

$$4 = x_1^2 + 16 \cdot 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \pm 2$$

Επομένως οι μοναδικές κοινές εφαπτομένες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 στα σημεία επαφής (2, 0) και (–2, 0) αντίστοιχα είναι οι

$x \cdot 2 - 4y \cdot 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (ε_1) και $(-2)x - 4 \cdot 0 \cdot y - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$ (ε_2)