ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη ομάδα, το 30% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα :

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) Β-Α iv) Α΄

(Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχόμενων

i) ο μαθητής που επιλέχτηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) i) $A \cup B$ = «ο μαθητής να συμμετέχει σε μία τουλάχιστον από τη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα ποδοσφαίρου»

ii) $A \cap B$ = «ο μαθητής να συμμετέχει και στη θεατρική ομάδα και στην ομάδα ποδοσφαίρου»

iii) Β-Α = « ο μαθητής να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου»

iv) Α΄ = « ο μαθητής να μην συμμετέχει στην θεατρική ομάδα»

β) Ισχύει P (A) = 25%, P (B) = 30% και $P(A \cap B)$ = 15%

i) P (B-A) = P (B)-P $(A \cap B)$ = 30%-15% = 15%

ii) $P(A \cup B)' = 1-P(A \cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A \cap B)) = 1-(25\%+30\%-15\%) = 1-40\% = 60\%$

Άσκηση 2

Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο

Β: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχόμενου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα

(Μονάδες 12)

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο όργανα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

Ισχύει P (A) = 50%, P (B) = 40% και $P(A \cap B)$ = 10%

Οπότε:

α) P (A∪B) = P (A) + P (B) – P (A∩B) = 50% + 40% - 10% = 80%

β) P (A∪B)΄= 1-P (A∪B) = 1-80% = 20%

Άσκηση 3

Το 70% των κατοίκων μιας πόλη έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

Μ: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) Α∪Μ ii) Μ-Α iii) Μ΄ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχτηκε :

i) Να μην έχει μηχανάκι (Μονάδες 7)

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Ισχύει P (A) = 70%, P (M) = 40% και P (A∩M) = 20%

α) i) Α∪Μ = «ο κάτοικος έχει τουλάχιστον αυτοκίνητο ή μηχανάκι»

ii) Μ-Α = «ο κάτοικος έχει μόνο μηχανάκι»

iii) Μ΄ = «ο κάτοικος δεν έχει μηχανάκι»

β) i) P (M΄) = 1−P (M) =1−40% = 60%

ii) P (A∪M)΄= 1−P (A∪M)=1−(P (A) + P (M)−P (A∩M))⇔

⇔ P (A∪M)΄ = 1− (70% +40% −20%) = 1−90% = 10%

Άσκηση 4

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) Α∪Β ii) Β−Α iii) Α΄ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα (Μονάδες 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Ισχύει P (A) = $\frac{20}{180}$, P (B) = $\frac{30}{180}$ και P (A∩B) =$\frac{10}{180}$

α) i) Α∪Β = «ο μαθητής να συμμετέχει σε μία τουλάχιστον από τη θεατρική ομάδα ή την ομάδα στίβου»

ii) Β-Α = «ο μαθητής συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου»

iii) Α΄ = «ο μαθητής δεν συμμετέχει στην θεατρική ομάδα»

β) i) $P(A\cup B)' = 1 - P(A\cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A\cap B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)' = 1 - (\frac{20}{180} + \frac{30}{180} - \frac{10}{180}) = \frac{140}{180}$

ii) $P(B - A) = P(B) - P(A\cap B) = \frac{30}{180} - \frac{10}{180} = \frac{20}{180}$

Άσκηση 5

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης . Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης (Μονάδες 10)

β) Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης (Μονάδες 5)

γ) Την πιθανότητα μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β΄ τάξης (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ν (Γ) = πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης

$N(\Gamma) = \frac{20}{100}\ 400 = 80$ μαθητές

β) Ν(Α) = πλήθος μαθητών της Α΄ τάξης , Ν(Α) = 200 και Ν(Β) = πλήθος μαθητών της Β΄ τάξης

Άρα $N(A) + N(B) + N(\Gamma) = 400 \Leftrightarrow N(B) = 400 - 200 - 80 \Leftrightarrow N(B) = 120$ μαθητές

γ) $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{120}{400} = 30\%$

Άσκηση 6

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δύο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης

Β: Να διαγωνίστηκε η Ζωή

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Ω = { ΔΕ,ΔΖ,ΚΕ,ΚΖ,ΜΕ,ΜΖ}

β) Α = { ΚΕ,ΚΖ,ΜΕ,ΜΖ} άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6}$

Β = { ΔΖ,ΚΖ,ΜΖ} άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6}$

Γ = {ΜΕ,ΜΖ} άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6}$

Άσκηση 7

Δίνεται το σύνολο *Ω={1,2,3,4,5,6}* και τα υποσύνολα του *Α={1,2,4,5}* και *Β ={2,4,6}*

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το *Ω,* τα σύνολα Α και Β. Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα *Α∪Β, Α∩Β, Α΄* και *Β΄* (Μονάδες 13)

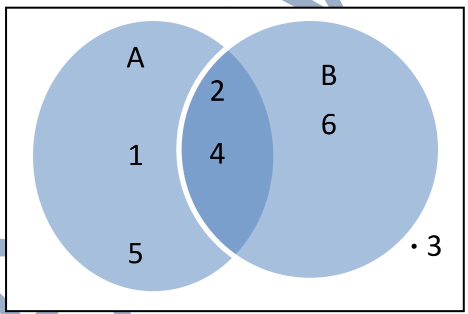
β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του *Ω*. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο *Α.* (Μονάδες 4)

(ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα *Α* και *Β*. (Μονάδες 4)

(iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα *Α,Β* (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ



α) Είναι Α∪Β = {1,2,4,5,6} και Α∩Β= {2,4}

Α΄= {3,6} και Β΄= {1,3,5}

β) (i) $P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(iii) $P(A \cup B) = = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{6}$

Άσκηση 8

Δίνονται δύο ενδεχόμενα *Α,Β* ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες :

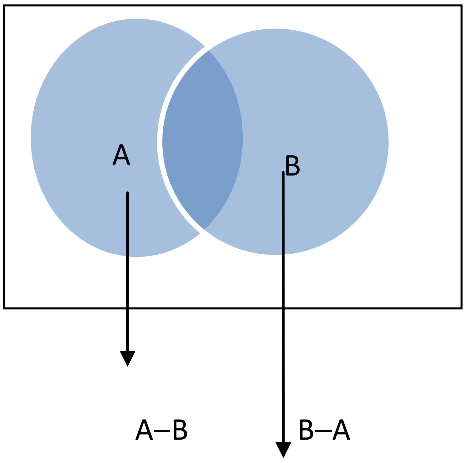
$$P(A) = \frac{3}{4},\ P(A-B) = \frac{5}{8} \text{ και } P(B) = \frac{1}{4}.$$

α) Να υπολογίσετε την P (Α∩Β) (Μονάδες 9)

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: Α ή Β (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχόμενου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A-B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

β) i) (Α–Β) ∪ (Β–Α) = «να πραγματοποιηθεί μόνο το Α ή μόνο το Β»

ii) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A \cup B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

Άσκηση 9

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παρακάτω πίνακα.
Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος (Μονάδες 7)

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιος του 3 (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Α = {12, 22, 32} Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9}$

Β= {12} άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$

Γ = {12,21,22,31,33} άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$

Άσκηση 10

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα *Α, Κ* και *Π* να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη.

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) i) Α΄= {η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη}

ii) $K \cup \Pi$ = {η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη}

β) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Άρα $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P(K \cup \Pi) = \frac{N(K \cup \Pi)}{N(\Omega)} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Μια μέρα, στο τμήμα Α1 ενός Λυκείου, το $\frac{1}{4}$ των μαθητών δεν έχει διαβάσει ούτε Άλγεβρα ούτε Γεωμετρία, ενώ το $\frac{1}{3}$ των μαθητών έχει διαβάσει και τα δύο αυτά μαθήματα. Η καθηγήτρια των μαθηματικών επιλέγει τυχαία ένα μαθητή για να τον εξετάσει. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής να έχει διαβάσει Άλγεβρα

Γ: ο μαθητής να έχει διαβάσει Γεωμετρία

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής :

i) να διαβάσει ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

ii) να έχει διαβάσει ένα μόνο από τα μαθήματα

(Μονάδες 8)

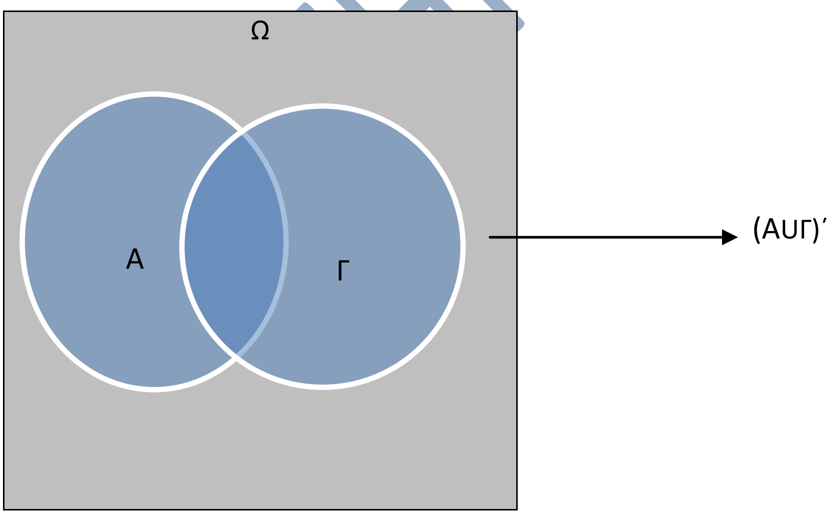
γ) Αν γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι μισοί από τους μαθητές έχουν διαβάσει Γεωμετρία να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής :

i) να έχει διαβάσει Γεωμετρία

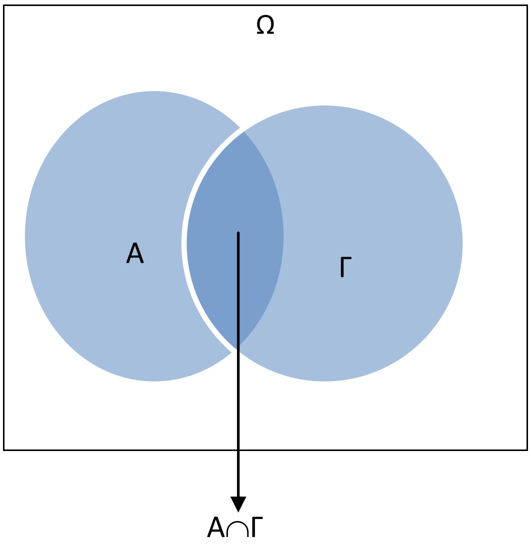
ii) να έχει διαβάσει Άλγεβρα (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $P\,(A\cup\Gamma)' = \frac{1}{4}$



$P\,(A\cap\Gamma) = \frac{1}{3}$



β) i) $P(A \cup \Gamma) = 1 - P(A\cup\Gamma)' = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ii) $P[(A-\Gamma) \cup (\Gamma - A)] = P(A\cup\Gamma) - P(A\cap\Gamma) =$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$

γ) i) Ισχύει $N(\Gamma) = \frac{N(\Omega)}{2}$ οπότε $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2}$

ii) $P(A\cup\Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A\cap\Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) = P(A\cup\Gamma) + P(A\cap\Gamma) - P(\Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow P(A) = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} - \frac{6}{12} \Leftrightarrow P(A) = \frac{7}{12}$

Άσκηση 2

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ’ ένα αυτοκίνητο και μετά από την διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

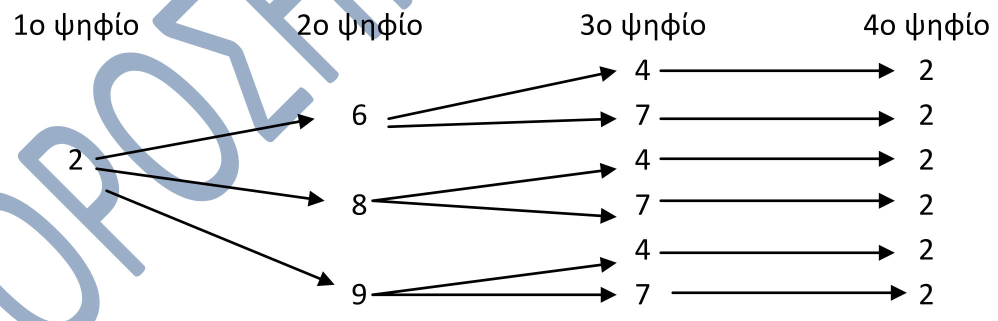
Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε το 8 ούτε το 9.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Δενδροδιάγραμμα



Ω = { 2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972 }

β) Α = { 2672, 2872, 2972 } $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Β = {2642, 2672, 2842, 2872 } $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Γ = { 2642, 2672 } $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Άσκηση 3

Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές. Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα του Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής :

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα

iii) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

iv) Να πέρασε την εξέταση.

(Μονάδες 12)

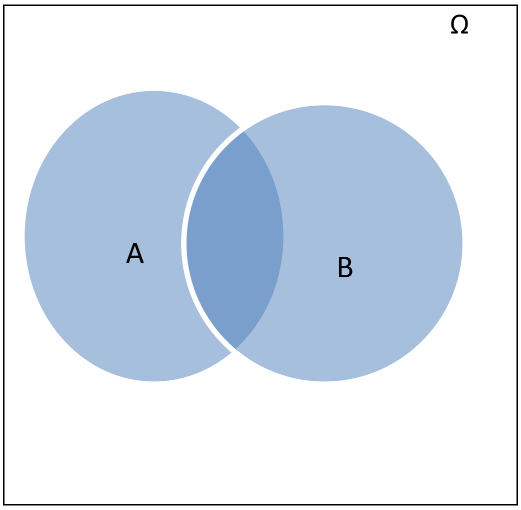
ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

α) A= «ο μαθητής απάντησε σωστά στο πρώτο θέμα»

B = «ο μαθητής απάντησε σωστά στο δεύτερο θέμα»

Οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{100}$, $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{50}{100}$, και $P(A \cap B) = \frac{30}{100}$



β) i) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{50}{100} - \frac{30}{100} = \frac{20}{100}$

ii) Το άριστα σημαίνει ότι απάντησε σωστά και στα δύο θέματα. Άρα το άριστα αντιστοιχεί στην $A \cap B$ οπότε:

$$P(A \cap B) = \frac{30}{100}$$

iii) $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B)' = 1 - \left(\frac{60}{100} + \frac{50}{100} - \frac{30}{100}\right) = \frac{20}{100}$$

iv) Για να περάσει την εξέταση πρέπει να έχει γράψει σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα.

Άρα $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{80}{100}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Από μία έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής πίνει γάλα

Β: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α) Να ορίσετε με χρήση της των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

iii) ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

Άσκηση 2

Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε ένα από τα άτομα αυτά.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι (Μονάδες 6)

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι

(Μονάδες 13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^o: ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΤΟ 2^O ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνονται οι παρακάτω παραστάσεις:

Α = $|2x-4|$ και Β = $|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\leq x<3$, να αποδείξετε ότι Α+Β = $x-1$ (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει Α+Β = 2; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $2\leq x<3 \Leftrightarrow 4\leq 2x<6 \Leftrightarrow 0\leq 2x-4<2$

Άρα Α = $|2x-4| = 2x-4$

Επίσης $2\leq x<3 \Leftrightarrow -1\leq x-3<0$

Άρα Β= $|x-3| = -x+3$

Οπότε Α+Β = $(2x-4)+(-x+3)=x-1$

β) Έστω ότι υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε Α+Β =2

Οπότε $x-1=2 \Leftrightarrow x=3$ Αδύνατον, αφού $2\leq x<3$

Άρα δεν υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε Α+Β =2

Άσκηση 2

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$,να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α΄ τρόπος

α) Έστω $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2 \Leftrightarrow (\alpha<0)$

$\alpha^2+1\geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq 0$ Ισχύει

β) Έστω $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|+\frac{1}{|\alpha|}\geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+1\geq 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2-2|\alpha|+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|\alpha|-1)^2\geq 0$ (1)

Αφού $\alpha<0$ τότε $|\alpha|=-\alpha$

Άρα η σχέση (1) γράφεται $(-\alpha-1)^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq 0$ που ισχύει.

β΄ τρόπος

Αφού α<0, τότε $-\alpha+\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\geq 2 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$ που ισχύει από το (α) ερώτημα.

Άσκηση 3

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) x+y (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $2 \leq x \leq 3$ (1)

β) $1 \leq y \leq 2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) οπότε έχουμε $3 \leq x+y \leq 5$

β) $2 \leq x \leq y \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 6$ (3)

$1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3$ (4)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4) οπότε έχουμε:

$4 + (-6) \leq 2x + (-3y) \leq 6 + (-3) \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 3y \leq 3$

γ) Είναι $2 \leq x \leq 3$ (1)

και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ (5)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (5) οπότε έχουμε:

$2\frac{1}{2} \leq x\frac{1}{y} \leq 3\,1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$

Άσκηση 4

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι ισχύει $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|} + \frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow$ $(|\alpha| > 0,\ |\beta| > 0)$

$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 \geq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει

β) Έστω ότι ισχύει $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 2\,|\alpha|\,|\beta| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha|\,|\beta| = 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|$

Άρα η ισότητα στη σχέση (1) ισχύει αν $|\alpha| = |\beta|$

Άσκηση 5

α) Να δείξετε ότι : $3< \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6- \sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $27< 30 < 64 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow 3 < \sqrt[3]{30} < 4$

β) Ισχύει $3< \sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 6 < 2\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 6 - \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{30}$

Άσκηση 6

Δίνονται οι αριθμοί : $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι : $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς :

$\sqrt{2}$, 1, $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Ισχύει ότι:

α) $A = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6 = 2^2 = 4$ άρα $A - B = 8 - 4 = 4$

β) Έστω ότι $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2})^6 < (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow 2^2 < 2^3 \Leftrightarrow 4< 8$ ισχύει

και έστω $1< \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 1^3 < (\sqrt[3]{2})^3 \Leftrightarrow 1< 2$ ισχύει

Άρα η τελική διάταξη είναι : $1< \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$

Άσκηση 7

Δίνεται η παράσταση : $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει : $1< x < 4$ και $2< y < 3$

Να αποδείξετε ότι :

α) $A = x-y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $1< x < 4$ άρα $x-1 > 0$

οπότε $|x - 1| = x-1$

και $2< y < 3$ άρα $y-3 < 0$

οπότε $|y - 3| = -y + 3$

Άρα έχουμε $A = |x - 1| + |y - 3| = x-1 - y + 3 = x - y + 2$

β) $2< y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2$

Άρα $1< x < 4$ (1) και $-3 < -y < -2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε έχουμε:

$1-3 < x - y < 4 - 2 \Leftrightarrow -2 < x - y < 2 \Leftrightarrow -2 + 2 < x - y + 2 < 2 + 2 \Leftrightarrow 0< A < 4$

Άσκηση 8

Δίνεται η παράσταση Α = $|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x-4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για κάθε x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) i) Ισχύει $x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0$

Άρα $|3x-6| = 3x-6$

Οπότε Α= $3x-6+2 = 3x-4$

ii) Ισχύει $x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0$

Άρα $|3x-6| = -3x+6$

Οπότε Α= $-3x+6+2 = -3x+8$

β) Αφού $x \geq 2$ ισχύει

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|-2} = \frac{9x^2-16}{3x-4} = \frac{(3x-4)\cdot(3x+4)}{3x-4} = 3x+4$$

Άσκηση 9

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν :

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\frac{\alpha+\beta}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 4\beta \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$ και $\frac{\gamma}{\delta-\gamma} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma = \delta-\gamma \Leftrightarrow \delta = 5\gamma$

β) $\Pi = \frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma} = \frac{3\beta\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma}{\beta\cdot 5\gamma-\beta\cdot\gamma} = \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma} = 1$

Άσκηση 10

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει : $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι : $y = 2x$ (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x$

β) Α= $\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)}=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$

Άσκηση 11

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για κάθε $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $1<x<2$ ισχύει

$x-1>0$ άρα $|x-1|=x-1$

και $x-2<0$ άρα $|x-2|=-x+2$

οπότε $A=|x-1|-|x-2|=(x-1)-(-x+2)=2x-3$

β) Αφού $x<1$ ισχύει $x-1<0$ άρα $|x-1|=-x+1$

επίσης $x<1<2$ άρα $x-2<0$ οπότε $|x-2|=-x+2$

Άρα $A=|x-1|-|x-2|=(-x+1)-(-x+2)=-x+1+x-2=-1$ (Ανεξάρτητη του x)

Άσκηση 12

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1>0$

β) Ισχύει $x^2+4x+5>0$ άρα $|x^2+4x+5|=x^2+4x+5$

Επίσης $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$ άρα $|x^2+4x+4|=x^2+4x+4$ οπότε η παράσταση Β γράφεται:

$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|=(x^2+4x+5)-(x^2+4x+4)=$

$=x^2+4x+5-x^2-4x-4=1$

Άσκηση 13

Δίνονται οι *μη μηδενικοί* πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta\,(\alpha^2+1) = \alpha\,(\beta^2+1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta\alpha^2+\beta = \alpha\beta^2+\alpha \Leftrightarrow \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\,(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \ \ \textit{απορρίπτεται αφού } \alpha \neq \beta \\ \text{ή} \\ \alpha\beta = -1 \end{cases}$$

Οπότε οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι

β) $K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\,\beta^{24}}{\alpha^{-2}\,\alpha^{25}\cdot\beta^{25}} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{1} = 1$

Άσκηση 14

Αν είναι $A = 2-\sqrt{3}$, $B = 2+\sqrt{3}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B = 1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Π = A^2+B^2$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A\cdot B = (2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^{\,2} = 4-3 = 1$

β) <u>**α) τρόπος**</u>

$Π = A^2+B^2 = (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 = 4-4\sqrt{3}+\sqrt{3}^{\,2}+4+4\sqrt{3}+\sqrt{3}^{\,2} = 4+3+4+3 = 14$

<u>**β) τρόπος**</u>

$Π = A^2+B^2 = (A+B)^2 - 2AB = (2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3})^2 - 2\cdot 1 = 4^2 - 2 = 14$

Άσκηση 15

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1| < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$ (Μονάδες 15)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

1, x, x^2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $|2x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

β) Έστω $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x\,(x-1) < 0$ το οποίο ισχύει αφού $x > 0$ και $x-1 < 0$

Άρα η διάταξη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο είναι : $x^2 < x < 1$

Άσκηση 16

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι ισχύει : $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha > 0)$

$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει

β) Από (α) ερώτημα αποδείχθηκε ότι:

$\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ και ομοίως $\beta + \dfrac{4}{\beta} \geq 4$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισώσεις οπότε έχουμε:

$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

Άσκηση 17

Δίνονται οι παραστάσεις : $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των *α, β*. (Μονάδες 12)

γ) Για ποιες τιμές των *α, β* ισχύει η ισότητα Κ=Λ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έστω $K \geq \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0$

Ισχύει αφού: $\alpha^2 \geq 0$ και $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$

β) Έστω $K = \Lambda \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0$ (1)

Για να ισχύει η σχέση (1) πρέπει ταυτόχρονα $\alpha = 0$ και $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \beta = 0$

Άρα $\alpha = \beta = 0$

Άσκηση 18

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$\sqrt{2} \cong 1{,}41$

$\sqrt{3} \cong 1{,}73$

$\sqrt{5} \cong 2{,}24$

$\sqrt{7} \cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παρακάτω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ (Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \simeq 2\cdot 2{,}24 = 4{,}48$

$\sqrt{45} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \simeq 3\cdot 2{,}24 = 6{,}72$

$\sqrt{80} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \simeq 4\cdot 2{,}24 = 8.96$

β) Η παράσταση γράφεται ισοδύναμα:

$$A = \frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45-\sqrt{5}}} = \frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5$$

Άσκηση 19

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς *x, y* ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x*, y ώστε:* $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Από την ανάπτυξη της ταυτότητας έχουμε:

$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2-2x+1+y^2+6y+9 = x^2+y^2-2x+6y+10$

Με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος έχουμε ισοδύναμα:

β) $(x-1)^2+(y+3)^2 = 0$ (1)

Όμως, $(x-1)^2 \geq 0$ και $(y+3)^2 \geq 0$, άρα για να έχει λύση η σχέση (1) πρέπει ταυτόχρονα

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$

Άσκηση 20

Αν $0<\alpha<1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι ισχύει: $\alpha^3<\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-1)<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)<0$ το οποίο ισχύει αφού $\alpha>0$, $\alpha-1<0$ και $\alpha+1>0$

β) Ισχύει: $0<\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha^3<1$

Επίσης $0<\alpha<1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>1$

Άρα η διάταξη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο αριθμό είναι:

$$0<\alpha^3<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}$$

Άσκηση 21

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3-2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση : $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Γενικά ισχύει: $d(2x, 3) = |2x-3| = \begin{cases} 2x-3, \text{αν } x > \frac{3}{2} \\ 3-2x, \text{αν } x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

Αφού $d(2x, 3) = 3-2x$ τότε $x \leq \frac{3}{2}$

β) Αφού $x \leq \frac{3}{2}$ τότε $2x-3 \leq 0$ άρα $|2x-3| = 3-2x$.

Επίσης $x \leq \frac{3}{2} < 3$ άρα $3-x > 0$ οπότε $|3-x| = 3-x$

Οπότε η παράσταση γράφεται ισοδύναμα :

$K = (3-2x) - 2(3-x) = 3-2x-6+2x = -3$

Άρα η παράσταση K είναι ανεξάρτητη του x

Άσκηση 22

Δίνεται η παράσταση : $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι : $A = 4$ (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση : $|x+A| = 1$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} =$

$= \frac{\sqrt{15}+3+5-\sqrt{15}}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$

β) Για $A = 4$ η εξίσωση γράφεται: $|x+4| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \\ \text{ή} \\ x+4 = -1 \Leftrightarrow x = -5 \end{cases}$

Άσκηση 23

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι Π$= 2x + 2y$

Ισχύει : $4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ (1)

$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 4 \le y \le 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε έχουμε

$12 \le 2x + 2y \le 20 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20$

β) Η περίμετρος του νέου ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι

$\Pi_1 = 2(x-1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2$

Οπότε έχουμε : $4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$

$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 12 \le y \le 18$

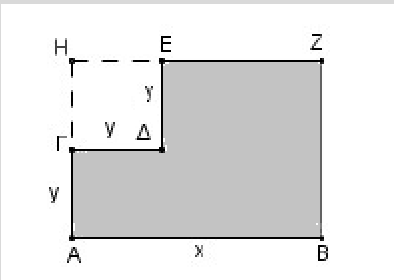
Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$20 \le 2x + 6y \le 32 \Leftrightarrow 18 \le 2x + 6y - 2 \le 30 \Leftrightarrow 18 \le \Pi_1 \le 30$

Άσκηση 24

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: Π$= 2x + 4y$



β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου τμήματος.

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του ΑΒΖΕΔΓ είναι

Π=ΑΒ+ΒΖ+ΖΕ+ΕΔ+ΔΓ+ΓΑ$= x + 2y + (x-y) + y + y + y = 2x + 4y$

β) Είναι $5 < x < 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16$

και $1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8$

Προσθέτουμε κατά μέλη όποτε έχουμε:

$14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις

$$A = \left(\sqrt{2}\right)^6, \qquad B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \qquad Γ = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$$

α) Να δείξετε ότι:

$$Α + Β + Γ = 23 .$$ (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς :

$$\sqrt[3]{3} \text{ και } \sqrt[6]{6} .$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Άσκηση 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

Άσκηση 3

Για τους αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \le \alpha \le 4 \qquad \text{και} \qquad -4 \le \beta \le -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

Άσκηση 4

Δίνονται οι παραστάσεις : $Κ = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $Λ = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι: $Κ - Λ = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ (Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $Κ \ge Λ$, για κάθε τιμή των α,β. (Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα Κ=Λ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Άσκηση 5

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν : $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$,

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) y- x (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΟ 2^{Ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση :$S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1) (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση (1) πρέπει $\Delta \geq 0$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$

Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$ (2)

Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 64$

Οπότε $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4 \pm 8}{-6} =$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$

λ	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$		$-$	ο	$+$	ο	$-$	

Οπότε η (2) ισχύει αν $\lambda \in \left[-2, \frac{2}{3}\right]$

β) Από τύπους vietta έχουμε $S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-\lambda}{1} = \lambda$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda^2 + \lambda - 1}{1} = \lambda^2 + \lambda - 1$

οπότε η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$S^2 - P - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda^2 + \lambda - 1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1$

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α)Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 4(\lambda-1) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 \Leftrightarrow$

$\Delta = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda-2)^2$

β) Αφού $\Delta = 4(\lambda-2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) Από τους τύπους vietta έχουμε :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda \quad \text{και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4(\lambda-1)}{1} = 4(\lambda-1)$$

οπότε η εξίσωση γράφεται: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow 2\lambda = 4(\lambda-1) \Leftrightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow 4 = 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

Άσκηση 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1| = 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2 \\ \text{ή} \\ 2x-1=-3 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1 \end{cases}$

β) Ισχύει : $\alpha=-1$ και $\beta=2$ οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $-x^2+2x+3=0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 + 12 = 16 > 0$

Οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$(\lambda-1)x = (\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda-1)x = (\lambda-1)(\lambda+1), \lambda \in \mathbb{R}$. (1)

Κάνουμε διερεύνηση της σχέσης (1)

β) Αν $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ τότε η (1) έχει μοναδική λύση την:

$$x = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow x = \lambda+1$$

γ) Αν $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ τότε η (1) γράφεται: $0 \cdot x = 0$ και είναι ταυτότητα.

Άσκηση 5

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2| = \sqrt{3}$ (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $|x-2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x-2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{3} \end{cases}$

β) Η εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις $x_1 = 2-\sqrt{3}$ και $x_2 = 2+\sqrt{3}$ είναι της μορφής:

$x^2 - (x_1+x_2)\cdot x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2\ \left(2+\sqrt{3}\ +2-\sqrt{3}\right) x + \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow\ x^2 -4x+1 = 0$

Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)\,x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Επιλέγουμε τρείς τυχαίες πραγματικές τιμές για το λ, οπότε:

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση (1) γράφεται: $(1-9)x = 1-3 \Leftrightarrow -8x = -2$

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) γράφεται: $(4-9)x = 4-6 \Leftrightarrow -5x = -2$

Για $\lambda = 3$ η εξίσωση (1) γράφεται: $(9-9)x = 9-9 \Leftrightarrow 0x = 0$

β) Η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-3)(\lambda+3)x = \lambda(\lambda-3) \quad (2)$$

Αν $(\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$ τότε η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{\lambda(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda+3}$$

γ) Ισχύει $x = 4 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\lambda+3} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda+3} = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4\lambda + 12 \Leftrightarrow 3\lambda = -12 \Leftrightarrow \lambda = -4$

Άσκηση 7

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$ (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2} = 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $-2x^2 + 10x - 12 = 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4(-2)(-12) = 100 - 96 = 4 > 0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-10\pm2}{-4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

β) Πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Έχουμε $\frac{-2x^2 +10x-12}{x-2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 +10x-12 = 0$ η οποία από το ερώτημα (α) έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$

Όμως $x\neq 2$ άρα και η εξίσωση έχει ρίζα την $x=3$

Άσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda\in \mathbb{R}$ (1)

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$ (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η σχέση (1) για $\lambda = 1$ γράφεται: $0x = 6$ οπότε είναι αδύνατη

Η σχέση (1) για $\lambda = -1$ γράφεται $0x = 0$ οπότε είναι αόριστη

β) Η σχέση (1) γράφεται: $(\lambda-1)(\lambda + 1)x = (\lambda+1)(\lambda+2)$

Αν $(\lambda-1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$

Τότε η (1) έχει μοναδική λύση την: $x = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda+2}{\lambda-1}$

Άσκηση 9

Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι :

i) $A+B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε $A+B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{10}{25-5} = \frac{1}{2}$

ii) $A\cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{20}$

β) Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β είναι της μορφής:

$$x^2 - (A + B)x + A \cdot B = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$$

Άσκηση 10

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες , x_1 και x_2

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων : x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

(Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

$$\frac{1}{x_1} \text{ και } \frac{1}{x_2}$$

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ένα τριώνυμο πρέπει $\Delta > 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4\cdot 2(-1) = 25+8 = 33 > 0$

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου τότε από τύπους Vietta έχουμε

$S = x_1+x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

Επίσης $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$

γ) Το τριώνυμο που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ είναι της μορφής :

$$x^2 - \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$$

Άσκηση 11

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν :

$$\alpha+\beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha\cdot\beta = -15$ (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) = -30$ (1)

Όμως $\alpha+\beta = 2$ άρα η (1) γράφεται $2\alpha\beta = -30 \Leftrightarrow \alpha\beta = -15$

β) Η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α και β είναι της μορφής :

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4\cdot 1(-15) = 4+60 = 64 > 0$

Άρα $\alpha = \frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$ και $\beta = \frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2} = \frac{2-8}{2} = -3$

ή αντιστοίχως $\alpha = -3$ και $\beta = 5$

Άσκηση 12

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η (1) έχει λύση το 1 τότε για x = 1 την επαληθεύει οπότε έχουμε :

$$1^2 - (\lambda - 1)\cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 6$$

β) Για $\lambda = 2$ η (1) γράφεται:

$x^2 - (2 - 1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$

Άρα για $\lambda = 2$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Άσκηση 13

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει πραγματικές ρίζες ένα τριώνυμο πρέπει $\Delta \geq 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot 1(\lambda - 2) = 4 - 4\lambda + 8 = 12 - 4\lambda$

Οπότε $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 12 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda \leq 3$

β) Από τύπους Vietta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{2}{1} = -2$

$P = x_1x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda-2}{1} = \lambda-2$

Οπότε έχουμε: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2(-2) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda - 2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Η τιμή $\lambda = -1$ είναι δεκτή αφού πρέπει $\lambda \leq 3$

Άσκηση 14

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 τότε για $x = -2$ η (1) γράφεται:

$$\lambda(-2)^2 - (\lambda - 1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda + 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

β) Για να έχει η εξίσωση (1) ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$ πρέπει $\Delta \geq 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda-1)^2 - 4\cdot\lambda(-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \geq 0$

Άρα η $\Delta \geq 0$ οπότε η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$

Άσκηση 15

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με το 2. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η παραπάνω εξίσωση 2ου βαθμού έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν $\Delta > 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = -4\lambda + 8$

Οπότε $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ με $\lambda \neq -2$

Άρα $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης τότε $x_1 + x_2 = 2$

Από τύπους Vietta $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{2\lambda}{\lambda+2}$

Άρα $-\dfrac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow -4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Η τιμή $\lambda = -1$ είναι δεκτή αφού $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

Άσκηση 16

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν :

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha \cdot \beta = -12$ (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(-1)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta = -12$

β) Η εξίσωση 2ου βαθμού η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς α, β είναι της μορφής :

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4(-12) = 49 > 0$

Άρα οι ρίζες είναι : $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{49}}{2} = 3$ και $\beta = \dfrac{-1-\sqrt{49}}{2} = -4$

ή αντιστοίχως $\alpha = -4$ και $\beta = 3$

Άσκηση 17

Έστω α, β πραγματικοί παράμετροι για τους οποίους ισχύουν :

$\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$

α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha + \beta = 5$ (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) = 20 \quad (1)$

Όμως αβ = 4 οπότε η (1) γράφεται : 4 (α + β) = 20 ⇔ α + β = 5

β) Η εξίσωση 2ου βαθμού η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς α , β είναι της μορφής :

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4\cdot4 = 25 - 16 = 9 > 0$

Άρα οι ρίζες είναι : $\alpha = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$ και $\beta = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = 1$

ή αντιστοίχως α = 1 και β = 4

Άσκηση 18

Δίνεται η εξίσωση : $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις :

i) όταν α = 1 (Μονάδες 5)

ii) όταν α =−3 (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) i) Η εξίσωση για α = 1 γράφεται : 4x = −8 ⇔ x = −2

ii) Η εξίσωση για α = −3 γράφεται : 0x = 0 άρα είναι αόριστη

β) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται : $(\alpha + 3)x = (\alpha-3)(\alpha+3)$

Αν $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση :

$x = \frac{(\alpha-3)(\alpha+3)}{\alpha+3} \Leftrightarrow x = \alpha - 3$

Άσκηση 19

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2-1}{x-x^2} + \frac{1}{1-x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2-1}{x-x^2} + \frac{1}{1-x} = 0.$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Η παράσταση γράφεται ισοδύναμα : $\Pi = \frac{2x^2-1}{x(1-x)} + \frac{1}{1-x}$

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 0$ και $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Άρα η παράσταση ορίζεται αν $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

β) $\frac{2x^2-1}{x-x^2} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(1-x)} + \frac{1}{1-x} = 0 \quad (1)$

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο είναι το $x(1-x)$ οπότε η (1) γράφεται :

$x(1-x)\ \dfrac{2x^2-1}{x(1-x)} + x(1-x)\ \dfrac{1}{1-x} = 0$

$2x^2 - 1 + x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4 \cdot 2(-1) = 9 > 0$

Άρα $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$ και $x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1-3}{4} = -1$

Άρα οι δύο ρίζες είναι δεκτές.

Άσκηση 20

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο Π = 20cm και εμβαδό Ε = $24cm^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω α cm και β cm τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου, οπότε $\alpha > 0$ και $\beta > 0$

Ισχύει $\Pi = 2\alpha + 2\beta \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 10$ (1)

και $E = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta = 24$ (2)

Η (1) γράφεται $\beta = 10 - \alpha$ ή $\alpha = 10 - \beta$ άρα ισχύει : $0 < \alpha < 10$ και $0 < \beta < 10$

Η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους α και β είναι της μορφής :

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

β) Έχουμε $x^2 - 10x + 24 = 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 24 = 100 - 96 => 0$

Άρα $\alpha = \dfrac{-(-10)+\sqrt{4}}{2} = \dfrac{10+2}{2} = 6$ και $\beta = \dfrac{-(-10)-\sqrt{4}}{2} = 4$

ή αντιστοίχως $\alpha = 4$ και $\beta = 6$

Άσκηση 21

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α , β τέτοιοι ώστε :

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272\,.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι :

$\alpha \cdot \beta = -64$. (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Με τη βοήθεια της παραπάνω ταυτόχρονα έχουμε:

$$12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 144 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β είναι της μορφής :

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Έχουμε $x^2 - 12x - 64 = 0$=

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0$

Οπότε $\alpha = \frac{-(-12)+\sqrt{400}}{2} = \frac{12+20}{2} = 16$ και $\beta = \frac{-(-12)-\sqrt{400}}{2} = \frac{12-20}{2} = -4$

ή αντιστοίχως $\alpha = -4$ και $\beta = 16$

Άσκηση 22

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες .

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει η παραπάνω εξίσωση 2ου βαθμού δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\Delta > 0$

Οπότε έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 \Leftrightarrow \Delta = -4\lambda + 8$

Άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$

Επίσης $\lambda \neq -2$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν

$\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

β) Από τύπους Vietta ισχύει :

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \Leftrightarrow -3 = \frac{\lambda-1}{\lambda+2} \Leftrightarrow -3\lambda - 6 = \lambda - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4\lambda = 5 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{4}$ που είναι δεκτή

Άσκηση 23

Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$ $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι : $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A + B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} \Leftrightarrow A + B = \frac{3+\sqrt{7} + 3-\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A + B = \frac{6}{9-7} \Leftrightarrow A + B = 3$

και $A \cdot B = \frac{1}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3-\sqrt{7}} \Leftrightarrow A \cdot B = \frac{1}{3^2 - \sqrt{7}^2} \Leftrightarrow A \cdot B = \frac{1}{2}$

β) Η εξίσωση του 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς Α , Β είναι της μορφής :

$x^2 - (A + B)x + A \cdot B = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0$

Άσκηση 24

Δίνεται το τριώνυμο : $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1)

(Μονάδες 13)

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου

$$\rho_1 = 2x_1 \text{ και } \rho_2 = 2x_2 .$$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\kappa)^2 - 4 \cdot 1(-2) \Leftrightarrow \Delta = \kappa^2 + 8 > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

β) i) Από τύπους Vietta έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-3}{1} = 3$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-2}{1} = -2$

ii) Η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι της μορφής :

$x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2 = 0$ (1)

Οπότε $\rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 3 = 6$

και $\rho_1 \cdot \rho_2 = (2x_1)(2x_2) = 4x_1 \cdot x_2 = 4(-2) = -8$

Τελικά η σχέση (1) γράφεται : $x^2 - 6x - 8 = 0$ που είναι και η ζητούμενη εξίσωση 2ου βαθμού.

Άσκηση 25

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4 \cdot 4(\lambda - 1) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \Leftrightarrow \Delta = 4(\lambda - 2)^2$

β) Είναι $\Delta = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

γ) Από τύπους Vietta έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda}{1} = -2\lambda$

και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4(\lambda-1)}{1} = 4(\lambda-1)$

Οπότε έχουμε : $(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 + 4(\lambda-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $3^{\text{Ο}}$: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΟ $4^{\text{Ο}}$ ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $d\,(x_1, x_2) = \dfrac{1}{d\,(x_1, x_2)}$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) Για κάθε $\lambda \neq \frac{1}{2}$ είναι $\Delta > 0$ και η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις x_1 και x_2

Έχουμε $d\,(x_1, x_2) = \dfrac{1}{d\,(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \dfrac{1}{|x_1 - x_2|} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 1 \Leftrightarrow 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$

Άσκηση 2

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση : $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ άρα έχουμε $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega_1 = 4$ ή $\omega_2 = 5$.

Άρα $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ ή $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

β) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ άρα έχουμε $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ (1).

Πρέπει η εξισώση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αλλά να είναι ετερόσημες.

Άρα πρέπει να ισχύει ταυτόχρονα $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0$ *και* $P = \gamma < 0$ ώστε οι ρίζες να είναι ετερόσημες. Έστω ότι οι ρίζες είναι $\omega_1 > 0$ (δεκτή) και $\omega_2 < 0$ (απορρίπτεται).

Θεωρούμε τις ρίζες $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = -4$ ώστε P$= -4 < 0$.
Η εξίσωση $\omega^2 + 3\omega - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $\omega_1 = 1$ (δεκτή) και $\omega_2 = -4$ (απορρίπτεται).
Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ και οι ρίζες είναι $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Άσκηση 3

Δίνεται το τριώνυμο :

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα S $= x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου P = $x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ = $(\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$

Άρα $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

β) Είναι S = $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και P = $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$

γ) Εάν $\lambda > 0$ τότε S = $\frac{\lambda^2+1}{\lambda} > 0$ άρα οι ρίζες $x_1,\ x_2$ είναι θετικές, αφού P = $1 > 0$ (άρα είναι ομόσημες) και S > 0.

δ) Είναι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1} \leq \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1}{2\lambda} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2+1 \geq 2\lambda$ ($\lambda>0$)

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$. (Μονάδες 9)

ii) Για λ = 1, να βρείτε την τιμή της παράστασης : $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 . x_2^2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4\cdot(-1) = 25\lambda^2 + 4 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) Είναι $(x_1+x_2)^2 - 18 - 7(x_1\cdot x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 18 - 7\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7\cdot(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

ii) Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 5x - 1 = 0$

Άρα $x_1^2.x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1.x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$

$= (-1)\cdot 5 - 3\cdot 5 + 4 = -5 - 15 + 4 = -16.$

Άσκηση 5

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ. (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε :

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$.

ii) να βρείτε το λ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot(2-\lambda^2) = 4\lambda^2 + 8 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 4$

ii) $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 2-\lambda^2$

γ) i) Εάν $x_1 = 2+\sqrt{3}$ είναι η μία ρίζα τότε επειδή

$x_1 + x_2 = 4 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3}) + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 2-\sqrt{3}$

ii) Από το γινόμενο $P = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow x_1\cdot x_2 = 2-\lambda^2 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3}) = 2-\lambda^2$

$\Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

Άσκηση 6

Δίνεται το τριώνυμο : $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριώνυμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών .

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι το πρόσημο των ριζών ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1)
έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να είναι $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4(\lambda - 7) \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda + 28 \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$

β) i) Είναι $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 6$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \lambda - 7$

ii) Πρέπει να ισχύουν τα εξής : $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda < 16$ και $P > 0 \Leftrightarrow \lambda > 7$.
Άρα $7 < \lambda < 16$

γ) i) Πρέπει να ισχύουν για την εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$ τα εξής :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda < 16 \\ S = 6 \\ \lambda > 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow 7 < \lambda < 16$$

ii) Επειδή ισχύει ότι $7 < 3\sqrt{10} < 16$ η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 7

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι : $x_1 + x_2 = 2$ (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε :

i) Να δείξετε ότι : $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες $x_1,\ x_2$ και την τιμή του λ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\lambda$. Όμως $\lambda < 1 \Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow 4(1 - \lambda) > 0$.
Άρα $\Delta > 0$.

β) Είναι $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 2$

γ) i) Είναι $|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4$
ή $x_1 - 2 = -x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (απορρίπτεται)

ii) Είναι : $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}$

Άρα $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 3(-1) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -3$

Άσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση : $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι : Δ = $(\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι : $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ = $\beta^2 - 4\alpha\gamma = (\alpha^2 - 1)^2 - 4 \cdot \alpha(-\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 =$
$= \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$

β) Επειδή Δ = $(\alpha^2 + 1)^2 > 0$ έχουμε δύο ρίζες.

$$\rho_{1,2} = \frac{(\alpha^2-1)\pm(\alpha^2+1)}{2\alpha} \quad \begin{cases} \rho_1 = \alpha \\ \rho_2 = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Είναι $|\rho_1 - \rho_2| = 2 \Leftrightarrow \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = 2$ ή $\frac{\alpha^2+1}{\alpha} = -2$

Για $\frac{\alpha^2+1}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Για $\frac{\alpha^2+1}{\alpha} = -2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 = -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$

Άσκηση 9

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1) , αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει ότι : $\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

β) Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ είναι $\lambda(\lambda-1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ διαιρώντας κατά μέλη με $\lambda - 1 \neq 0$

γ) Η εξίσωση (1) έχει τη μορφή $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$

με Δ = $[-(\lambda + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = (\lambda - 1)^2 > 0$ *για* $\lambda \neq 1$

δ) Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ έχει Δ = $(\lambda - 1)^2 > 0$

και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{(\lambda+1)\pm(\lambda-1)}{2\lambda} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Άσκηση 10

α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 3x - 4 = 0$ (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 9 + 16 = 25$ Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις

$$x_1 = -1 \quad \text{ή} \quad x_2 = 4$$

β) i) Για $x = \frac{\alpha}{\beta}$ στην (1) έχουμε $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{3\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$ που ισχύει

ii) Επειδή α , β ομόσημοι το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ άρα η λύση της (1) είναι $\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$

Άσκηση 11

α) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4) \text{ με } \alpha\cdot\gamma \neq 0.$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι :

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4). (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για την εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$ είναι $\Delta = 100$ και οι ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Για την εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$ είναι $\Delta = 100$ και οι ρίζες $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

β) Εάν ρ_1, ρ_2 ρίζες της (3) τότε $\rho_1 + \rho_2 = \frac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Άρα $\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = \frac{\alpha}{\gamma}$ και $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{\frac{-\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = -\frac{\beta}{\gamma}$.

Άρα οι $\frac{1}{\rho_1}$ και $\frac{1}{\rho_2}$ είναι ρίζες της $x^2 + \frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma} = 0 \Leftrightarrow \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$

i) Εάν ήταν ρ = 0 τότε από την (3) θα είχαμε $\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=0$
άτοπο γιατί $\alpha\cdot\gamma\neq 0$

ii) Από την (4) για $x=\frac{1}{\rho}$ γράφεται $\gamma\frac{1}{\rho^2}+\beta\frac{1}{\rho}+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$

το οποίο και ισχύει.

Άσκηση 12

Δίνεται η εξίσωση : $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός – ρ είναι ρίζα της εξίσωσης :

$$2x^2-\lambda x-36=0$$

(Μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι :

- $\rho\neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης : $-36x^2+\lambda x+2=0$ (Μονάδες 4 + 6 =10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta=\lambda^2-4\cdot 2\cdot(-36)=\lambda^2+288>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) Αρκεί να δείξουμε ότι $2(-\rho)^2-\lambda(-\rho)-36=0 \Leftrightarrow 2\rho^2+\lambda\rho-36=0$ που ισχύει από δεδομένο.

- ii) Εάν ήταν ρ = 0 τότε $2\cdot 0^2+\lambda\cdot 0-36=0 \Leftrightarrow -36=0$, άτοπο . Άρα $\rho\neq 0$
- Αρκεί να δείξουμε ότι : $-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\lambda\frac{1}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow \frac{36}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}+2=0$
  $\Leftrightarrow 36+\lambda\rho+2\rho^2=0$ που ισχύει.

Άσκηση 13

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση : $x^4-8x^2-9=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση : $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι : Αν $\gamma<0$ τότε

i) $\beta^2-4\gamma>0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x^2=\omega\geq 0$. Άρα $\omega^2-8\omega-9=0$. Είναι $\Delta=100>0$.

Άρα $\omega=-1$ (απορρίπτεται) ή $\omega=9 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

β) i) Εάν $\gamma<0 \Leftrightarrow -4\gamma>0$. Άρα $\beta^2-4\gamma>0$ ως άθροισμα ενός μη αρνητικού και ενός θετικού όρου.

ii) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$. Άρα $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ είναι $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$, άρα έχει δύο ρίζες.
Όμως $P = \gamma < 0$ άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.
Έστω $\omega_1 < 0$ (απορρίπτεται) , $\omega_2 > 0$ (δεκτή) . Άρα $x^2 = \omega_2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_2}$.

Άσκηση 14

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2)
α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1) . (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2) . (Μονάδες 10)
γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή.
(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για την εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$, είναι $\Delta = 1 > 0$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_1 = 1$ ή $x_2 = 2$
β) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$. Άρα είναι $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$.
Από ερώτημα (α) έχουμε $\omega = 1$ ή $\omega = 2$.
Άρα $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ή $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.
γ) Το τριώνυμο $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = \sqrt{2}$ που είναι ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον ισχύει ότι για κάθε $x < 0$ είναι $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} > 0$.

Άσκηση 15

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$
α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)
β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 5)
γ) Αν $\lambda < 0$ τότε:
i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.
ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

β) Είναι $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$

γ) i) Για $\lambda < 0$ είναι $\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow S < 0$ και επειδή $P = 1 > 0$ το τριώνυμο έχει ρίζες αρνητικές.

ii) είναι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |x_1 + x_2| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2$

επειδή όμως $\lambda < 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται $\dfrac{\lambda^2+1}{-\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq -2\lambda \Leftrightarrow$
$\lambda^2 + 1 + 2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

Άσκηση16

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε , όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση :

$$λ= (2x+5)^2-8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι τον 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)$=0 και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

(Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για x=-5 η σχέση γράφεται

$$λ=[2(-5)+5]^2-8(-5)=(-5)^2+40=65$$

β) Για λ=20 η σχέση γράφεται

$$(2x+5)^2-8x=20 \Leftrightarrow 4x^2+20x+25-8x-20=0 \Leftrightarrow 4x^2+12x+5=0$$

Έχουμε Δ=64>0 οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$

γ) Είναι $λ=(2x+5)^2-8x \Leftrightarrow 4x^2+12x+25-λ=0$

i) Αν λ=5 τότε έχουμε $4x^2+12x+20=0$ η οποία είναι αδύνατη γιατί $Δ=-176<0$

ii) Για να έχει λύσεις η εξίσωση πρέπει $Δ\geq 0 \Leftrightarrow 144-16(25-λ)\geq 0 \Leftrightarrow$

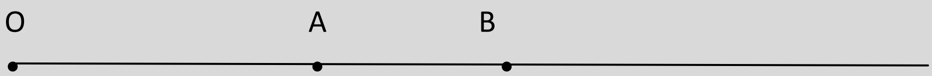
$\Leftrightarrow 256+16λ\geq 0 \Leftrightarrow λ\geq -16$

Άσκηση 17

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας , του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο , S_A, S_B, S_Γ, και S_Δ αντίστοιχα ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$S_A<S_B, \quad S_\Gamma=\frac{S_A+3S_B}{4} \quad \text{και} \quad |S_\Delta-S_A|=|S_\Delta-S_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α,Β παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων S_A,S_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις

$S_A + S_B$ = 1,4 και $S_A \cdot S_B$ =0,45 τότε:

i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς S_A,S_B

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις S_A,S_B,S_Γ,S_Δ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση $|S_\Delta - S_A| = |S_\Delta - S_B| \Leftrightarrow S_\Delta - S_A = S_\Delta - S_B \Leftrightarrow S_A = S_B$ (απορρίπτεται)

ή

$\Leftrightarrow S_\Delta - S_A = -S_\Delta + S_B \Leftrightarrow S_\Delta = \dfrac{S_A+S_B}{2}$

Έστω ότι $S_\Delta < S_\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{S_A+S_B}{2} < \dfrac{S_A+3S_B}{4} \Leftrightarrow 2S_A + 2S_B < S_A + 3S_B \Leftrightarrow S_A < S_B$ το οποίο ισχύει.

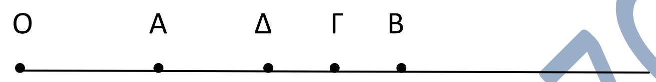
Άρα $S_\Delta < S_\Gamma$ (1)

Επίσης από τη σχέση $|S_\Delta - S_A| = |S_\Delta - S_B|$ προκύπτει ότι το σπίτι της Δήμητρας ισαπέχει από τα σπίτια του Βαγγέλη και της Άννας.

Τέλος από τη σχέση $S_\Gamma = \dfrac{S_A+3S_B}{4} \Leftrightarrow 4\,S_\Gamma = S_A + 3S_B < S_B + 3S_B$.

Άρα $4\,S_\Gamma < 4\,S_B \Leftrightarrow S_\Gamma < S_B$ (2)

Όποτε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε



β) i) Είναι S= $S_A + S_B$ = 1,4 και P = $S_A \cdot S_B$ =0,45 άρα οι S_A,S_B είναι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0$$

ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0$ και έχουμε Δ=0,16> 0 άρα οι ρίζες είναι x_1=0,5 ή x_2=0,9 και επειδή $S_A < S_B$ έχουμε S_A = 0,5km και S_B = 0,9 km

Επίσης $S_\Gamma = \dfrac{S_A+3S_B}{4} = \dfrac{0{,}5+3\cdot 0{,}9}{4}$ = 0,8 km

και $|S_\Delta - S_A| = |S_\Delta - S_B| \Leftrightarrow |S_\Delta - 0{,}5| = |S_\Delta - 0{,}9| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_\Delta - 0{,}5 = S_\Delta - 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}5 = 0{,}9$ (αδύνατη)

ή $\Leftrightarrow S_\Delta - 0{,}5 = -S_\Delta + 0{,}9 \Leftrightarrow S_\Delta = 0{,}7$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0 \quad (1)$ με παράμετρο , $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) . (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

γ) Αν x_1 , x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει : $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

Άσκηση 2

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση : $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση : $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1)$ με παραμέτρους $\beta , \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι : Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

Άσκηση 3

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1 , x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριώνυμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1 . (Μονάδες 6)

Άσκηση 4

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + \left(\sqrt{3} - 1\right)x + \sqrt{3}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$ (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο (Μονάδες 13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}: ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΟ 2^{Ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1 < x+9$ και $2-\frac{x}{2} \leq x+\frac{1}{2}$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους (Μονάδες 10)

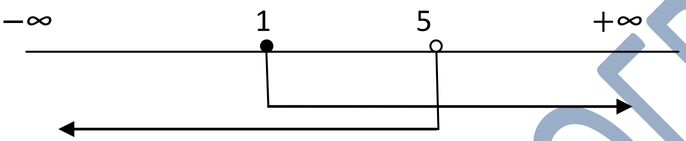
β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $3x-1 < x+9 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$

$$2-\frac{x}{2} \leq x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x \leq 2x+1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$$

β) Το σύνολο των κοινών λύσεων είναι $x \in [1,5)$



Το σύνολο των κοινών λύσεων είναι : x∈ [1,5)

Άσκηση 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του x∈ $\mathbb{R}$ για τις οποίες : $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης :

$2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ = 1> 0 . Άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$x_1=\frac{1}{2}\ ,\ x_2=1$$

β)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3\cdot x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (\frac{1}{2},1)$

γ) Επειδή $\frac{\sqrt{3}}{2} \in (\frac{1}{2},1)$ είναι λύση της ανίσωσης.

Επειδή $\frac{1}{\sqrt{2}} \in (\frac{1}{2},1)$ είναι λύση της ανίσωσης.

Άσκηση 3

α) Να λύσετε την εξίσωση : $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $|x-1| < 2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).
(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Επιλύοντας τη σχέση (1) έχουμε Δ=49> 0 οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = 2 \ \text{ή} \ x_2 = -\frac{3}{2}$$

β) Έχουμε $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

γ) Η ρίζα $x_1 = 2 \in (-1,3)$ οπότε είναι κοινή λύση των σχέσεων (1) και (2)

Άσκηση 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x+4| \geq 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση A $= \big||\alpha+4| - 3\big|$ χωρίς απόλυτες τιμές.
Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $|x+4| \geq 3 \Leftrightarrow x+4 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq -1$ ή $x+4 \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -7$.

β) Αν $\alpha \geq -1$ τότε από ερώτημα (α) είναι : $|\alpha+4| \geq 3 \Leftrightarrow |\alpha+4| - 3 \geq 0$.
Άρα A = $|\alpha+4| - 3$. Επειδή $\alpha \geq -1 \Leftrightarrow \alpha+4 \geq 3 > 0$.
Οπότε A = α + 4 −3 ⇔ $A = \alpha + 1$

Άσκηση 5

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.
(Μονάδες 12)

β) Για λ = 3, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Αφού x=1 είναι ρίζα του τριωνύμου τότε $2\cdot 1^2 + \lambda \cdot 1 - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$

β) Για $\lambda = 3$ το τριώνυμο γράφεται: $2x^2 + 3x - 5$

Έχουμε Δ=49> 0 οπότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $x_1 = 1, x_2 = -\frac{5}{2}$

Έτσι το τριώνυμο γράφεται $2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)(x + \frac{5}{2})$

Άσκηση 6

α) Να λύσετε τις ανισώσεις : $|2x-5| \leq 3$ και $2x^2 - x + 1 \geq 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του α) ερωτήματος (Μονάδες 9)

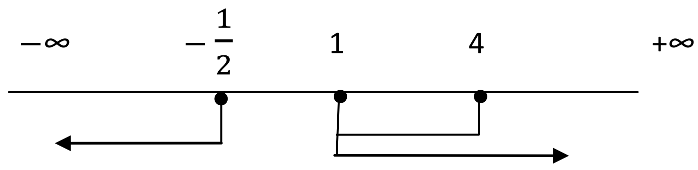
ΛΥΣΗ

α) Έχουμε : $|2x-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$
Επίσης έχουμε $2x^2 - x + 1 \geq 0$

Είναι $\Delta = 9 > 0$ οπότε οι ρίζες είναι $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$

β) 

Οι κοινές λύσεις είναι : $x \in [1,4]$

Άσκηση 7

α) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος . (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 5\,|x+1| - 3(|x+1| + 4) = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\,|x+1| - 3|x+1| - 12 = 10 \Leftrightarrow 2|x+1| = 22 \Leftrightarrow |x+1| = 11 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = 11 \Leftrightarrow x = 10$ ή $x + 1 = -11 \Leftrightarrow x = -12$

β) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Είναι $\Delta = 16 > 0$ άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $x \in (-\infty , -1] \cup [3 , +\infty)$.

γ) Η $x = 10 \in [3 , +\infty)$ άρα είναι λύση της ανίσωσης

Η $x = -12 \in (-\infty , -1]$ άρα είναι λύση της ανίσωσης

Άσκηση 8

α) Να λύσετε την εξίσωση : $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) $|2x-4| = 3|x-1| \Leftrightarrow 2x-4 = 3(x-1)$ ή $2x-4 = -3(x-1)$

$2x-3x = 4-3$ ή $2x-4 = -3x+3$

$-x = 1$ ή $5x = 7$

$x = -1$ ή $x = \frac{7}{5}$

β) $|3x-5| > 1 \Leftrightarrow 3x-5 > 1 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$

ή $\Leftrightarrow 3x-5 < -1 \Leftrightarrow 3x < 4 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$.

γ) Επειδή $-1 < \frac{4}{3}$ η λύση $x = -1$ είναι λύση της ανίσωσης.

Επειδή $\frac{7}{5} > \frac{4}{3}$ η λύση $x = \frac{7}{5}$ δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Άσκηση 9

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με $E = x\cdot y$

Είναι $1 < x < 3$ (1) και $2 < y < 4$ (2)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε έχουμε $2 < x\cdot y < 12 \Leftrightarrow 2 < E < 12$

Άσκηση 10

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x , y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι : $6 < \Pi < 14$ όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow 2 < y < 4$.

β) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$.

Άρα $1 < x < 3 \Leftrightarrow 2 < 2x < 6$ (1)

και $2 < y < 4 \Leftrightarrow 4 < 2y < 8$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε έχουμε

$6 < 2x + 2y < 14 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$

Άσκηση 11

α) Να λύσετε την ανίσωση : $|x-5| < 4$. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παρακάτω ανίσωση, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x-5| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-5 < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 9$

β) Ισχύει $1 < \alpha < 9$ άρα $\alpha > 0$ οπότε ισοδύναμα έχουμε

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$$

Άσκηση 12

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y για τα οποία ισχύουν :

$$|x-3| \le 2 \text{ και } |y-6| \le 4.$$

α) Να δείξετε ότι : $1 \le x \le 5$ και $2 \le y \le 10$. (Μονάδες 12)

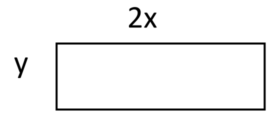
β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y . (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) $|x-3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x-3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$.

$|y-6| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le y-6 \le 4 \Leftrightarrow 2 \le y \le 10$.

β)



Η περίμετρος του ορθογωνίου ισούται με $\Pi = 2 \cdot 2x + 2y = 4x + 2y$

Είναι $1 \le x \le 5 \Leftrightarrow 4 \le 4x \le 20 \quad (1)$

$2 \le y \le 10 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 20 \quad (2)$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1)και (2) οπότε έχουμε $8 \le 4x + 2y \le 20 \Leftrightarrow 8 \le \Pi \le 40$

Άσκηση 13

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει : $d(x,-2) < 1$

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$ (Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $d(x,-2) < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

β) Έχουμε $x^2 + 4x + 3 < 0$

Είναι $\Delta = 49 > 0$ οπότε έχουμε δύο ρίζες τις $x_1 = -3$ και $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
x^2+4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα για $-3 < x < -1$ ισχύει $x^2 + 4x + 3 < 0$

Άσκηση 14

Δίνονται οι ανισώσεις $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \leq 0$ (2)

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) ,(2) (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

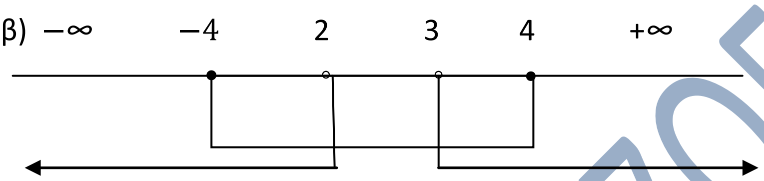
ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $-x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$

Οπότε $\Delta = 1 > 0$ και οι ρίζες είναι $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ και $x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow |x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

β) 

Οι κοινές λύσεις είναι $x \in [-4,2) \cup (3,4]$

Άσκηση 15

α) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 10x + 21 < 0$ (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση : $A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι $A = -x^2 + 11x - 24$ (Μονάδες 8)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 16 > 0$ άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x_1 = 7$, $x_2 = 3$

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (3, 7)$.

β) i) Για $x \in (3, 7)$ είναι $x^2 - 10x + 21 < 0$ και $x - 3 > 0$.

Άρα $A = x - 3 - (x^2 - 10x + 21) = -x^2 + 11x - 24$

ii) Είναι $A = -x^2 + 11x - 24 \Leftrightarrow -x^2 + 11x - 24 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 30 = 0$

Οπότε $\Delta = 1 > 0$ Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις :

$x_1 = 6$ ή $x_2 = 5$

Επειδή $x_1, x_2 \in (3, 7)$ οι λύσεις είναι δεκτές.

Άσκηση 16

α) Να λύσετε την ανίσωση : $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$. (Μονάδες 12)

β) Αν α , β δύο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης . (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Άρα οι ρίζες είναι $x_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, $x_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$

β) Είναι $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 1$ και $\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$

Άρα $1 \leq 3\alpha \leq 3$ και $2 \leq 6\beta \leq 6$

Έτσι προσθέτοντας κατά μέλη : $3 \leq 3\alpha + 6\beta \leq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{3\alpha+6\beta}{9} \leq 1$

Άρα ο αριθμός $\frac{3\alpha+6\beta}{9}$ είναι λύση της ανίσωσης .

Άσκηση 17

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (℃), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση :

$$T = 15 + 25 \cdot x, \quad \text{όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290℃. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440℃; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 30$ είναι $T = 15 + 25 \cdot 30 = 765$℃

β) Για $T = 290$ είναι $15 + 25x = 290 \Leftrightarrow x = 11$ χιλιόμετρα

γ) $T > 440 \Leftrightarrow 15 + 25x > 440 \Leftrightarrow 25x > 425 \Leftrightarrow x > 17$

Άρα βρίσκεται σε βάθος μεγαλύτερο των 17 χιλιομέτρων.

Άσκηση 18

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση : $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι x$\in (-3\,,1)$ (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης : Κ = $\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$

Άρα $x \in (-3\,,1)$

β) Είναι $x > -3 \Leftrightarrow x+3 > 0$ και $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0$.

Άρα Α = $\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4} = \dfrac{x+3-x+1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Άσκηση 19

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 9)

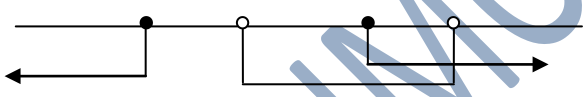
γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β) (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) $|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow x-1 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 6$ ή $x-1 \leq -5 \Leftrightarrow x \leq -4$.

β) d (x , 5)$< 3 \Leftrightarrow |x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8$.

γ) $-\infty$ -4 2 6 8 $+\infty$



Οι κοινές λύσεις είναι x$\in [6\,,8)$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

α) Να λυθεί η εξίσωση : $x^2 - x - 2 = 0$ (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησής σας.

(Μονάδες 5)

Άσκηση 2

Δίνεται το τριώνυμο : $f(x) = 3x^2 + 9x - 12, x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Άσκηση 3

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει : $|x - 2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι : $-1 < x < 5$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)

Άσκηση 4

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y για τους οποίους ισχύει : $|y - 2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι : $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση : $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

Άσκηση 5

α) Να λύσετε την ανίσωση : $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $|x + 5| \geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

Άσκηση 6

α) Να λύσετε την ανίσωση : $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δύο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα , να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

Άσκηση 7

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών :

i) $|2x-3|\leq 5$ (Μονάδες 9)

ii) $|2x-3|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

Άσκηση 8

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών :

i) $|1-2x|<5$ και (Μονάδες 9)

ii) $|1-2x|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΤΟ 4^{Ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση : $x^2-2(\lambda-1)x+\lambda+5=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta = 4\lambda^2-12\lambda-16$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1 , x_2 και d (x_1 , x_2) είναι η απόσταση των x_1 , x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών , να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : d $(x_1 , x_2)=\sqrt{24}$.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta=[-2(\lambda-1)]^2-4(\lambda+5)=4\lambda^2-8\lambda+4-4\lambda-20=4\lambda^2-12\lambda-16$

β) Πρέπει να ισχύει $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-16>0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4>0$

λ	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$\lambda^2-3\lambda-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(4+\infty)$

γ) Είναι d $(x_1 , x_2)=\sqrt{24} \Leftrightarrow |x_1-x_2|=\sqrt{24} \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2-2x_1\cdot x_2 = 24 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [2(\lambda-1)]^2-4(\lambda+5)=24 \Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda-16=24$

$\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-10=0$

Άρα $\lambda=-2$ ή $\lambda=5$ που είναι δεκτές τιμές από το (β) ερώτημα.

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\neq-2$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι : $\Delta = 12\lambda + 25$ (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1\cdot x_2$. (Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1 , x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση : $(x_1+x_2-1)^2+(x_1\cdot x_2+3)^2=0$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = (2\lambda+3)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-2) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 16 \Leftrightarrow \Delta = 12\lambda + 25$

β) Πρέπει να ισχύει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 12\lambda + 25 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\dfrac{25}{12}$ με $\lambda \neq -2$

γ) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}$

δ) Είναι $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 1 = 0$ και $x_1 \cdot x_2 + 3 = 0$

Οπότε $-\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1 = 0$ (1) και $\dfrac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3 = 0$ (2)

Η σχέση (1) δίνει : $2\lambda + 3 = -\lambda - 2 \Leftrightarrow 3\lambda = -5 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{5}{3}$

Η σχέση (2) δίνει : $\lambda - 2 + 3(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του λ ώστε να ισχύει η παραπάνω σχέση.

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δύο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{2\lambda+2}{2} = \lambda + 1$

και $x_2 = \dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{2\lambda-2}{2} = \lambda - 1$

γ) Πρέπει να ισχύουν $x_1, x_2 \in (-2, 4)$ άρα

$$-2 < \lambda - 1 < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 5 \text{ και } -2 < \lambda + 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < \lambda < 3$$

Άρα οι κοινές λύσεις είναι $\lambda \in (-1, 3)$

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda\,(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες .

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i) να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $(x-2)^2 = \lambda\,(4x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4\lambda x - 3\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - (4+4\lambda)x + 4 + 3\lambda = 0$

β) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow [-(4+4\lambda)]^2 - 4(4+3\lambda) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 + 32\lambda + 16\lambda^2 - 16 - 12\lambda > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 5\lambda > 0$

λ	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
$\Delta = 4\lambda^2 + 5\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\Delta > 0$ για $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (0, +\infty)$

γ)i) Είναι $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 4 + 4\lambda$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = 4 + 3\lambda$

ii) $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = 16\, x_1 \cdot x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 =$

$= 16(4+3\lambda) - 12(4+4\lambda) + 9 = 25$

Άσκηση 5

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \epsilon R$

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες τις (1) είναι ομόσημοι αριθμοί

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 1 > 0$ άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες $x_1 = 2, x_2 = 3$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα ισχύει $x^2 - 5x + 6 > 0$ για $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$,

και $x^2 - 5x + 6 < 0$ για $x \in (2,3)$

β) i) Πρέπει να ισχύει $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (\lambda - 2) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 > 0$

Άρα από α) ερώτημα πρέπει $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

ii) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ και

$P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda - 2}{\frac{1}{4}} > 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 8 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2.$

Η συναλήθευση των παραπάνω δίνει $\lambda \in (3, +\infty)$

Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) , τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι :

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί

ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει : $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 4 \Leftrightarrow |\lambda| \geq 2 \Leftrightarrow \lambda \geq 2$ ή $\lambda \leq -2$

β) Ισχύει ότι : $\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι: $\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \lambda\frac{1}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda\rho + \rho^2 = 0$ που ισχύει .

γ i) Για $\lambda > 2$ είναι $\Delta > 0$. Επίσης $S = x_1 + x_2 = \lambda > 2 > 0$

και $P = x_1 \cdot x_2 = 1 > 0$ άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι θετικές.

ii) Λύνουμε την (1) και έχουμε : $x_1 = \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$ ή $x_2 = \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$

Άρα $x_1 + 4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} + 4\,\dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \geq 4 \Leftrightarrow 5\lambda - 8 \geq 3\sqrt{\lambda^2 - 4}$ (2)

Επειδή $\lambda > 2 \Leftrightarrow 5\lambda > 10 \Leftrightarrow 5\lambda - 8 > 2$ άρα υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη της (2) : $(5\lambda - 8)^2 \geq \left(3\sqrt{\lambda^2 - 4}\right)^2 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 80\lambda + 100 \geq 0 \Leftrightarrow (4\lambda - 10)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Άσκηση 7

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες ; (Μονάδες 6)

γ) Αν $x_1,\ x_2$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d\,(x_1,\ x_2) < 2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) Είναι $0 < d\,(x_1,\ x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2$

Είναι $|x_1,\ x_2| > 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$ που ισχύει για $\lambda \neq \frac{1}{2}$

και $|x_1 - x_2| < 2$ όμως οι ρίζες της (1) είναι $x_1 = \lambda$ και $x_2 = 1 - \lambda$.

Άρα έχουμε $|\lambda - (1 - \lambda)| < 2 \Leftrightarrow |2\lambda - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 2\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -1 < 2\lambda < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$$

Τελικά ισχύει ότι $\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow = (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) Πρέπει να ισχύει $S - P > 0 \Leftrightarrow 1 - (\lambda - \lambda^2) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 1 > 0$.

Άρα η ανίσωση αυτή ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ γιατί έχει $\Delta = -3 < 0$.

Άσκηση 9

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$. (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Γεωμετρικά η παράσταση $|x-5|$ εκφράζει την απόσταση των αριθμών x και 5 στον πραγματικό άξονα άρα είναι $|x-5| = (AM)$

και η παράσταση $|x-9|$ εκφράζει την απόσταση των αριθμών x και 9 στον πραγματικό άξονα άρα είναι $|x-9| = (BM)$

β) i) Το σημείο Μ ισαπέχει από τα σημεία Α και Β

ii) Α(5) Μ(x) Β(9)

Το σημείο Μ παριστάνει τον αριθμό 7

Αλγεβρικά : $|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow x-5 = x-9 \Leftrightarrow 5 = 9$ (αδύνατο)

ή $x-5 = -(x-9) \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$.

Άσκηση 10

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων .

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος :

$$|x+2| + |x-7|$$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α = $|x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά .

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε γεωμετρικά το προηγούμενο συμπέρασμα . (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i) $|x+2|$: η απόσταση των αριθμών x και -2 στον πραγματικό άξονα άρα $|x+2| = (AM)$

ii) $|x-7|$: η απόσταση των αριθμών x και 7 άρα $|x-7| = (BM)$

β) Α(-2) Μ(x) Β(7)

Είναι $|x+2| + |x-7| = (AM) + (MB) = (AB)$

γ) Είναι Α = $|x+2| + |x-7| = (AB) = 9$ μονάδες

δ) Αλγεβρικά έχουμε $x > -2 \Leftrightarrow x+2 > 0 \Leftrightarrow |x+2| = x+2$

Και $x < 7 \Leftrightarrow x-7 < 0 \Leftrightarrow |x-7| = 7-x$.

Άρα Α = $|x+2| + |x-7| = x+2+7-x = 9$.

Άσκηση 11

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.
(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόσταση του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από το 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19 .
(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow 2<x<6$.

β) i) Ισχύει ότι $|x-4|<2$ άρα $2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow 2<3x-4<14$

και επειδή η παράσταση $3x-4$ παίρνει θετικές τιμές έχουμε ότι $2<|3x-4|<14$

ii) Ισχύει ότι $|x-4|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow 2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -13<3x-19<-1$$

και επειδή η παράσταση $3x-19$ παίρνει αρνητικές τιμές ισχύει $|3x-19|=19-3x$

Άρα είναι $-13<3x-19<-1 \Leftrightarrow 1<19-3x<13 \Leftrightarrow 1<|3x-19|<13$

Άσκηση 12

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση : d (x , 5)≤ 9.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών , να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β) . (Μονάδες 10)

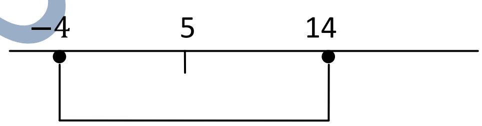
δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι :

$|x+4|+|x-14|=18$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Η σχέση d (x , 5) ≤ 9 περιλαμβάνει τους πραγματικούς αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη ή ίση των 9 μονάδων.

β) Είναι



γ) Είναι $|x-5|\leq 9 \Leftrightarrow -9\leq x-5\leq 9 \Leftrightarrow -4\leq x\leq 14$

δ) Είναι $x\geq -4 \Leftrightarrow x+4\geq 0 \Leftrightarrow |x+4|=x+4$

και $x\leq 14 \Leftrightarrow x-14\leq 0 \Leftrightarrow |x-14|=14-x$

Άρα $|x+4|+|x-14|=x+4+14-x=18$.

Άσκηση 13

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου : $x^2 + 9x + 18$ (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$ (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει :

$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) i) Είναι Δ = $9 > 0$ άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $x_1 = -3$ και $x_2 = -6$

ii) Είναι $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0 \Leftrightarrow |x + 3| = 0$ και $|x^2 + 9x + 18| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (x = -3) και ($x_1 = -3$ ή $x_2 = -6$) .

Άρα η κοινή λύση είναι : x = -3

β) i)

x	$-\infty$		-6		-3		$+\infty$
$x^2 + 9x + 18$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2 + 9x + 18 > 0$ για $x \in (-\infty, -6) \cup (-3 + \infty)$

και $x^2 + 9x + 18 < 0$ για $x \in (-6, -3)$

ii) Επειδή είναι $|x^2 + 9x + 18| = -(x^2 + 9x + 18)$ θα ισχύει ότι :

$x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow x \in (-6, -3)$.

Άσκηση 14

Δίνεται το τριώνυμο f(x) = $-x^2 + 2x + 3$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου f(x) για τις διάφορες τιμές του x.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε , αιτιολογώντας την απάντησή σας , το πρόσημο του γινομένου:

f (2,999)$\cdot$ f($-1{,}002$) (Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού :

$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ = $16 > 0$ άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα f(x) > 0 για $x \in (-1{,}3)$ και f(x) < 0 για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (3 + \infty)$

β) Επειδή 2,999 $\in (-1{,}3)$ είναι f (2,999) > 0

και επειδή $-1{,}002 \in (-\infty, -1)$ είναι f ($-1{,}002$) < 0. Άρα f (2,999)$\cdot$ f($-1{,}002$) < 0

γ) Η παράσταση $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 = -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3$ είναι της μορφής :

f(x)= $-x^2 + 2x + 3$ με x = $|\alpha|$ όπου $-3 < \alpha < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < 3$ και βέβαια $|\alpha| \geq 0$

Άρα $|\alpha| \in [0, 3)$ που ανήκει στο διάστημα $(-1{,}3)$ άρα $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$.

Άσκηση 15

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση :

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $(\alpha-1)(1-\beta)>0 \Leftrightarrow$

$\alpha-1>0$ και $1-\beta>0$ άρα $\alpha>1$ και $\beta<1$ άρα $\beta<1<\alpha$ ή

$\alpha-1<0$ και $1-\beta<0$ άρα $\alpha<1$ και $\beta>1$ άρα $\alpha<1<\beta$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α , β

β) Είναι $|\beta-\alpha|=4 \Leftrightarrow \beta-\alpha=4$ ή $\beta-\alpha=-4$

- Εάν $\beta-\alpha=4 \Leftrightarrow \beta=\alpha+4 \Leftrightarrow \beta>\alpha$ άρα ισχύει ότι $\alpha<1<\beta$ από ερώτημα (α)

Έτσι $|\alpha-1|=-(\alpha-1)$ και $|1-\beta|=-(1-\beta)$.

Άρα $K=|\alpha-1|+|1-\beta|=-(\alpha-1)-(1-\beta)=\beta-\alpha=4$

- Εάν $\beta-\alpha=-4 \Leftrightarrow \beta=\alpha-4 \Leftrightarrow \beta<\alpha$. Άρα ισχύει ότι $\beta<1<\alpha$ από ερώτημα (α)

Έτσι $|\alpha-1|=\alpha-1$ και $|1-\beta|=1-\beta$

Άρα $K=|\alpha-1|+|1-\beta|=\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta=4$

Άσκηση 16

α) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ , λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση : $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι : $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $x^2+1\geq\frac{5}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-5x+2\geq 0$. Έχουμε Δ = 9> 0 άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις

$$x_1=2,\quad x_2=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Έτσι τελικά $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$

Β) i) Από την ανίσωση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$ έχουμε

- $\lambda-1<0$ και $\kappa-1>0$ άρα $\lambda<1$ και $\kappa>1$ οπότε $\lambda<1<\kappa$ ή
- $\lambda-1>0$ και $\kappa-1<0$ άρα $\lambda>1$ και $\kappa<1$ οπότε $\kappa<1<\lambda$

ii) Εάν ισχύει ότι $\lambda<1<\kappa$, επειδή κ, λ λύσεις της ανίσωσης (1) ισχύει :

$(-\infty,\frac{1}{2}] \cup [2,+\infty)$ άρα $\lambda \le \frac{1}{2}$ και $\kappa \ge 2 \Leftrightarrow -\kappa \le -2$. Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$\lambda-\kappa \le -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \kappa-\lambda \ge \frac{3}{2}$$

Εάν ισχύει $\kappa<1<\lambda$ όμοια έχουμε $\kappa \le \frac{1}{2}$ και $\lambda \ge 2$ άρα $\kappa-\lambda \le -\frac{3}{2}$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $|\kappa-\lambda| \ge \frac{3}{2}$

Άσκηση 17

Δίνεται πραγματικός αριθμός α, που ικανοποιεί τη σχέση : $|\alpha-2|<1$

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α . (Μονάδες 8)

β) Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο : $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει : $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3 \Leftrightarrow \alpha \in (1,3)$

β) i) Είναι $\Delta = [-(\alpha-2)]^2-4\cdot\frac{1}{4} = \alpha^2-4\alpha+4-1 = \alpha^2-4\alpha+3$

α	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$\Delta=\alpha^2-4\alpha+3$		+	0	−	0	+	

Άρα $\Delta<0$ γιατί $\alpha \in (1,3)$

ii) Επειδή $\Delta<0$ ισχύει ότι το τριώνυμο $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}$ είναι ομόσημο του συντελεστή του x^2 για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $x^2-(\alpha-2)x+\frac{1}{4}>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 18

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο α$\in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο f(x) = x^2+2x+3, x$\in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι f(x)$\geq$ 2, για κάθε x$\in \mathbb{R}$ (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$ (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση γίνεται $x^2+2x+3-\alpha=0$

i) Πρέπει να ισχύει $\Delta>0 \Leftrightarrow 4-4(3-\alpha)>0 \Leftrightarrow 4-12+4\alpha>0 \Leftrightarrow 4\alpha>8 \Leftrightarrow \alpha>2.$

ii) Πρέπει να ισχύει Δ = 0⇔ α = 2 . Άρα η εξίσωση γίνεται

$$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Β) i) Είναι f(x)$\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+3\geq 2 \Leftrightarrow x^2+2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\geq 0$

που ισχύει για κάθε x$\in \mathbb{R}$.

ii) Είναι $\sqrt{f(x)-2}\leq 2 \Leftrightarrow f(x)-2\leq 4 \Leftrightarrow f(x)-6\leq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3\leq 0$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3			0	$-$	0	$+$	

Άρα x$\in[-3,1]$

Άσκηση 19

Δίνεται το τριώνυμο : $x^2+\beta x+\beta^2$, όπου $\beta\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα του Δ του τριωνύμου . (Μονάδες 4)

β) i) Αν β$\neq$ 0 τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i) , όταν β = 0 (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής σας στο (β) , να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ = $\beta^2-4\beta^2=-3\beta^2$

β) i) Εάν $\beta\neq 0$ τότε Δ =$-3\beta^2<0$ και ισχύει ότι : $x^2+\beta x+\beta^2>0$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

ii) Εάν β = 0 τότε Δ = 0 και ισχύει ότι : $x^2+\beta x+\beta^2\geq 0$ για κάθε x$\in\mathbb{R}$.

γ) Εάν $\beta\neq 0$ τότε θεωρούμε την παράσταση $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ ως τριώνυμο του α άρα έχει Δ = $-3\beta^2<0$ και θα ισχύει ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$ για κάθε α$\in R^*$.

Άσκηση 20

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμού α , β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha-1)(\beta-2)|=(\alpha-1)(\beta-2)$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2-3x+2>0$ για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

και $x^2-3x+2<0$ για $x\in(1,2)$

β) Από την ανίσωση $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)<0$ έχουμε :

- $\alpha^2-3\alpha+2>0$ και $\beta^2-3\beta+2<0$ άρα $\alpha\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ και $\beta\in(1,2)$

Έτσι $\alpha<1\Leftrightarrow\alpha-1<0$ και $\beta<2\Leftrightarrow\beta-2<0$

Άρα $|(\alpha-1)(\beta-2)|=|\alpha-1|\cdot|\beta-2|=[-(\alpha-1)]\cdot[-(\beta-2)]=(\alpha-1)(\beta-2)$

ή

- $\alpha^2-3\alpha+2<0$ και $\beta^2-3\beta+2>0$ άρα $\alpha\in(1,2)$ και $\beta\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

Έτσι $\alpha>1$ και $\beta>2$.

Άρα $|(\alpha-1)(\beta-2)|=|\alpha-1|\cdot|\beta-2|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

Άσκηση 21

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση :

$$y = 60t-5t^2$$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος y = 175 m; (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από το 100 m (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $y=0\Leftrightarrow 60t-5t^2=0\Leftrightarrow 5t^2-60t=0\Leftrightarrow t=0$ (απορρίπτεται) ή $t=12$ sec.

Άρα μετά από 12 sec θα επανέλθει στο έδαφος.

β) Για y = 175 $\Leftrightarrow$ $60t - 5t^2 = 175 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 35 = 0 \Leftrightarrow t = 5sec$ ή $t = 7sec$.

γ) Πρέπει $y > 100 \Leftrightarrow 60t - 5t^2 > 100 \Leftrightarrow 5t^2 - 60t + 100 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 < 0$.

t	0		2		10		$+\infty$
$t^2 - 12t + 20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $2 < t < 10$

Άσκηση 22

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$|\alpha - 2| < 1$$
$$|\beta - 3| \leq 2$$

α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)

δ)Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση $|\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$

β) Από τη σχέση $|\beta - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5$

γ) Είναι $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6$ (1)

και $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow -3 \geq -3\beta \geq -15 \Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3$ (2)

Προσθέτουμε (1) + (2) : $-13 < 2\alpha - 3\beta < 3$

δ) Είναι $1 \leq \beta \leq 5 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$

Επίσης $1 < \alpha < 3$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $\frac{1}{5} < \frac{\alpha}{\beta} < 3$.

Άσκηση 23

α) Να λύσετε την ανίσωση : $|x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x - 3| \leq 5$$ (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων x που ικανοποιούν την ανίσωση

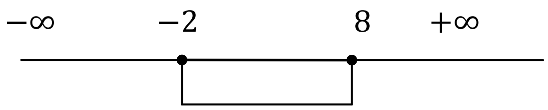
$$\big||x| - 3\big| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x-3| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x-3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le x \le 8$

β)



Το σύνολο των λύσεων είναι οι πραγματικοί αριθμοί που απέχουν από το 3 ίσες ή λιγότερες από 5 μονάδες.

γ) Από τη λύση της ανίσωσης έχουμε $-2 \le x \le 8$ με $x \in \mathbb{Z}$

Άρα x = -2 , -1, 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8.

δ) Είναι $\big||x|-3\big| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le |x|-3 \le 5 \Leftrightarrow -2 \le |x| \le 8$

Η ανίσωση $|x| \ge -2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η ανίσωση $|x| \le 8 \Leftrightarrow -8 \le x \le 8$ και επειδή $x \in \mathbb{Z}$ το $x = -8, -7, -6 \ldots, 6, 7, 8$

Άσκηση 24

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \ne 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

α) Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου , να αποδείξετε ότι : γ = 2α και β = -3α. (Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1,2)$, τότε :

i) να αποδείξετε ότι $\alpha < 0$ (Μονάδες 9)

ii) να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $S = -\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow 1+2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \beta = -3\alpha$ και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 1\cdot 2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \gamma = 2\alpha$

β)i) Το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α στο διάστημα (1 , 2) των δύο ριζών άρα αφού $f(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$ για $x \in (1, 2)$

ii) Είναι $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0 \Leftrightarrow 2\alpha x^2 - 3\alpha x + \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(2x^2 - 3x + 1) < 0$

Επειδή $\alpha < 0$ τότε $2x^2 - 3x + 1 > 0$

Είναι Δ = 1> 0 άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

Άσκηση 25

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β , γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$ τότε :

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι γ< 4. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow \left|-\frac{-\beta}{1}\right| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow \beta = 4$ ή $\beta = -4$

β) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow |\beta|^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow 4^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma < 4$

γ) Θέτω $|x| = \omega \geq 0$ άρα $\omega^2 - \beta\omega + 3 = 0$

- Για $\beta = -4$ είναι $\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = -1$ ή $\omega_2 = -3$ που απορρίπτεται, άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.
- Για $\beta = 4$ είναι $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = -1$ ή $\omega_2 = 3$, που είναι δεκτές άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

Άρα για β = $= -4$

Άσκηση 26

Δίνεται η εξίσωση : $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν α = 2 (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση : $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 \leq 25 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow |\alpha| \leq \frac{5}{2}$

Το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ άρα οι ρίζες είναι αντίστροφες αριθμοί.

β) Για α = 2 είναι $2x^2 - 5x + 2 = 0$ με Δ = 9> 0 άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = 2 \text{ ή } x_2 = \frac{1}{2}.$$

γ) Για κάθε $x \neq 0$ θέτουμε $x + \frac{1}{x} = \omega$ άρα έχουμε $2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$

που έχουμε βρει $\omega_1 = 2$ ή $\omega_2 = \frac{1}{2}$

Για $\omega_1 = 2$ έχουμε $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Για $\omega_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0$ που έχει Δ = -15 άρα είναι αδύνατη.

Άσκηση 27

Δίνεται η ανίσωση : $|x+1|<4$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

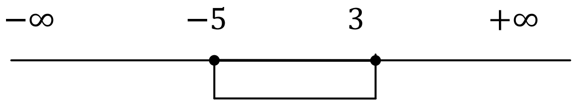
β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x\leq 0$.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x+1|<4 \Leftrightarrow -4<x+1<4 \Leftrightarrow -5<x<3$



β) Εάν $x\in\mathbb{Z}$ και $x\in(-5,\ 3)$ θα είναι $x=-4$ ή $x=-3$ ή $x=-2$ ή $x=-1$
ή $x=0$ ή $x=1$ ή $x=2$

γ) Το τριώνυμο με ρίζες $x=0$ και $x=2$ είναι το x^2-2x του οποίου ο πίνακας προσήμων είναι :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άσκηση 28

α) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2-5x-6<0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\,\frac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\alpha\in(-6,\ 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta=49>0$ άρα το τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $x_1=-1$ και $x_2=6$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x^2-5x-6<0 \Leftrightarrow x\in(-1,\ 6)$

β) Θεωρούμε $K(x)=x^2-5x-6$ άρα $K\left(-\frac{46}{47}\right)<0$ γιατί $-\frac{46}{47}\in(-1,\ 6)$

γ) Είναι $\Lambda=|\alpha|^2-5|\alpha|-6$. Επειδή $\alpha\in(-6,\ 6)\Leftrightarrow -6<\alpha<6\Leftrightarrow |\alpha|<6$
και $|\alpha|\geq 0$ άρα $\Lambda<0$ αφού $|\alpha|\in[0\,,6)$ που ανήκει στο διαστημα $(-1,\ 6)$.

Άσκηση 29

Δίνονται οι ανισώσεις : $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\leq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$ (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

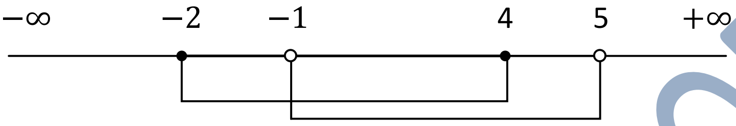
ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x-2|<3 \Leftrightarrow -3<x-2<3 \Leftrightarrow -1<x<5$ και

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
x^2-2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in[-2,\ 4]$

β) Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις από τον άξονα των πραγματικών αριθμών



Άρα $x\in(-1,\ 4]$

γ) Επειδή $-1<\rho_1\leq 4$ και $-1<\rho_2\leq 4$ προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$$-2<\rho_1+\rho_2\leq 8 \Leftrightarrow -1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}\leq 4 \text{ άρα } \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\in(-1,\ 4].$$

Άσκηση 30

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριώνυμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριώνυμου και α , β δύο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\alpha<x_1<x_2<\beta$,

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου : $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot \beta\cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας . (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\Delta = \kappa^2-4\cdot 3(-4)=\kappa^2+48>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Το γινόμενο των ριζών $P=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{4}{3}<0$ άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

γ) Ο πίνακας προσήμων του τριωνύμου είναι

x	α		x_1		x_2		β
$3x^2+\kappa x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Προκύπτει ότι $x_1<0 \Leftrightarrow \alpha<0$ και $x_2>0 \Leftrightarrow \beta>0$.
Προκύπτει επίσης ότι $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)>0$. Άρα $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot \beta\cdot f(\beta)<0$.

Άσκηση 31

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$x^2-4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x+16=0,\ \lambda\in(0,4).$$

α) Να βρείτε :

i) την περίμετρο Π το ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 16$, για κάθε $\lambda\in(0,4)$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος του Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16 ; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο ; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=8\frac{\lambda+\frac{1}{\lambda}}{1}=8\lambda+\frac{8}{\lambda}$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=16$

β) Είναι $\Pi\geq 16 \Leftrightarrow 8\lambda+\frac{8}{\lambda}\geq 16$ (1)

Αφού $\lambda>0$ η (1) γράφεται $8\lambda^2+8\geq 16\lambda \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+1\geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2\geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε λ.

γ) Είναι $\Pi=16 \Leftrightarrow 8\lambda+\frac{8}{\lambda}=16 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $2x_1+2x_2=16$ και $x_1\cdot x_2=16$ άρα είναι $x_1=x_2=4$.
Οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Άσκηση 32

Οι πλευρές x_1 , x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης :

$$x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0 \text{ με } \lambda\in(0,2)$$

α) Να βρείτε

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου . (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$ (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 2\cdot 2 = 4$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda(2-\lambda)}{1} = -\lambda^2 + 2\lambda$$

β) Είναι $E \leq 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda \leq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$ που ισχύει .

γ) Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο εάν $E = 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda = 1 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν είναι Ε = 1 και η περίμετρος είναι Π = 4

Οπότε $x_1 = x_2 = 1$ άρα είναι τετράγωνο.

Άσκηση 33

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλόγραμμου, τότε :

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4 , τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 \geq 0$. Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές.

Από τύπους Vietta ισχύει $S = x_1 + x_2 = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$

Άρα αφού λ>0 τότε $S > 0$ και $P > 0$ οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές .

β) i) Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $E = x_1 \cdot x_2 = 1$

ii) Η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2\,\frac{\lambda^2+1}{\lambda}$$

Έστω $\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2\,\frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$

το οποίο ισχύει.

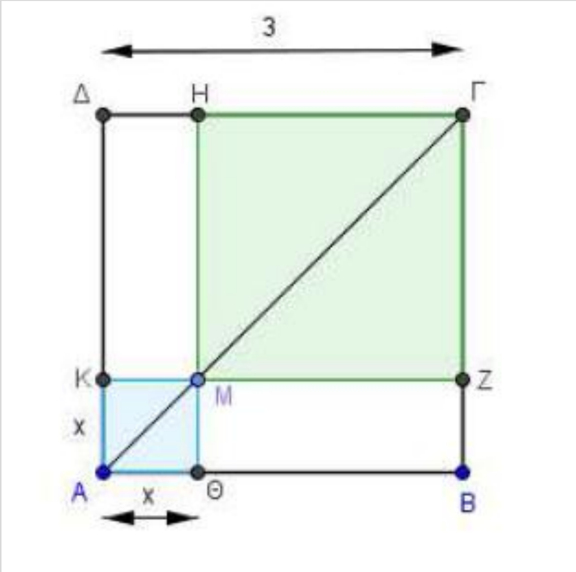
iii) Είναι $\Pi = 4 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Άρα για $\lambda = 1$ θα ισχύει ότι $x_1 \cdot x_2 = 1$ και $2x_1 + 2x_2 = 4$ οπότε

$x_1 = 1$ και $x_2 = 1$. Έτσι το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο.

Άσκηση 34

Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι Ε = $2x^2 - 6x + 9$, $x \in (0\,,3)$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι Ε $\geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0\,,3)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Ε = $(\mathrm{Α Θ Μ Κ}) + (\mathrm{Μ Ζ Γ Η}) = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 =$

$= 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0\,,3)$

β) Είναι Ε $\geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0$

το οποίο και ισχύει.

γ) Είναι Ε $= \frac{9}{2} \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Άρα $ΑΜ^2 = 2x^2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow ΑΜ = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Επειδή $ΑΓ^2 = 9 + 9 = 18 \Leftrightarrow ΑΓ = 3\sqrt{2}$ το σημείο Μ είναι το μέσο του ΑΓ .

Άσκηση 35

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90^o) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x , y τέτοια ώστε : x + y = 10 .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο :

$$E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x),\ x \in (0, 10).$$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0, 10)$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0, 10)$ το εμβαδόν Ε (x) γίνεται μέγιστο , δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ ; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι το εμβαδόν $E = \frac{x \cdot y}{2}$. Όμως επειδή x + y = 10 ⇔ y = 10 − x είναι

$E(x) = \frac{x(10-x)}{2} = \frac{1}{2}(-x^2 + 10)$ με $x \in (0, 10)$ γιατί $y = 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$

β) Είναι $E(x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x^2 + 10x) \leq \frac{25}{2} \Leftrightarrow -x^2 + 10x \leq 25 \Leftrightarrow$

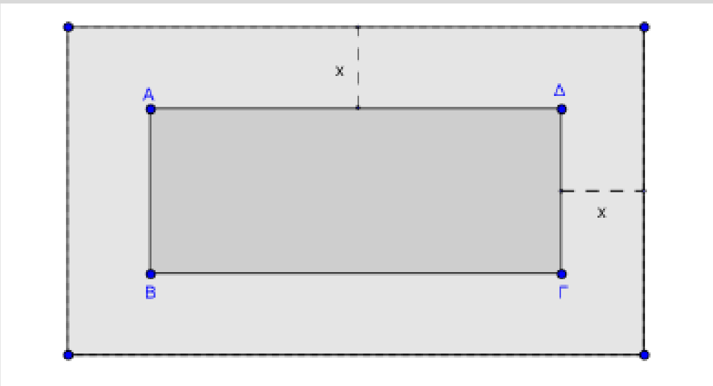
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$ που ισχύει .

γ) Είναι $E(x) = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 \Leftrightarrow x = 5$ και $y = 10 - 5 = 5$.

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Άσκηση 36

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις 15m και 25m. Ο δήμος για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x,\ x > 0$$ (Μονάδες 9)

β) Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης , αν αυτή έχει εμβαδό $E = 500m^2$ (Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό μικρότερο από $500m^2$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδό της ζώνης είναι $E(x) = (25 + 2x)(15 + 2x) - 25 \cdot 15 \Leftrightarrow \quad E(x) = 4x^2 + 80x\,,\ \ x > 0$

β) Αν $E(x) = 500m^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 80x = 500 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 = 0$

Οπότε το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες τις $x_1 = -25$ (απορρίπτεται) ή $x_2 = 5$.

γ) Είναι $E(x) < 500 \Leftrightarrow x^2 + 20x - 125 < 0$

Άρα έχουμε

x	$-\infty$		-25		5		$+\infty$
E(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε $E(x) < 500$ ισχύει για $-25 < x < 5$ και επειδή $x > 0$ τότε $0 < x < 5$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$ (Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \dfrac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$ (Μονάδες 10)

Άσκηση 2

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - (\alpha + 1)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριώνυμου είναι: $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 16$

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι το τριώνυμο έχει δύο ρίζες x_1 και x_2. (Μονάδες 2)

i) Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών του.

ii) Να αποδείξετε ότι $d\left(x_1, 1\right) \cdot d\left(x_2, 1\right) = 4$ (Μονάδες 8)

Άσκηση 3

Δίνεται η ανίσωση : $|x - 1| \leq 3$ (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) (Μονάδες 3)

γ) Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

(Μονάδες 15)

Άσκηση 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x. (Μονάδες 10)

β) Αν $κ = -\frac{8889}{4444}$, τότε η τιμή της παράστασης $k^2 - 2k - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < μ < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $μ^2 - 2|μ| - 8$; .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Άσκηση 5

Δίνονται οι ανισώσεις : $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$ (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί $ρ_1$ και $ρ_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{ρ_1+ρ_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

Άσκηση 6

Δίνονται οι ανισώσεις : $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3,-1)$ (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί $ρ_1$ και $ρ_2$ ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων, να δείξετε ότι $ρ_1 - ρ_2 \in (-2,2)$ (Μονάδες 10)

Άσκηση 7

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + λ - 3$, με παράμετρο $λ \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < λ < 12$ τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ , μ είναι δύο αριθμοί με $κ < 0$ και $x_1 < μ < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $κ \cdot f(κ) \cdot μ \cdot f(μ)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΡΟΟΔΟΙ

ΤΟ 2^{Ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1,3,5,7,…

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος γιατί προσθέτουμε πάντα τον ίδιο αριθμό ω=2 για να πάρουμε τον επόμενο όρο της ακολουθίας.

Είναι $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 1 + 19 \cdot 2 = 39$

β) Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot [2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] = \frac{\nu}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (\nu - 1)2] = \frac{\nu}{2} \cdot 2\nu = \nu^2$$

Άρα $S_\nu = \nu^2$

Άσκηση 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει **α** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^{η} σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 10)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Οι σειρές των καθισμάτων αποτελούν μία αριθμητική πρόοδο με $\omega = \alpha$ γιατί ο αριθμός των καθισμάτων διαδοχικών σειρών διαφέρει κατά α.

β) Ισχύει ότι $S_{10} = 300$ και $\alpha_7 = 36$

Οπότε έχουμε: $\frac{10}{2} \cdot [2\alpha_1 + 9 \cdot \omega] = 300 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 9 \cdot \omega = 60$ (1)

και $\alpha_1 + 6 \cdot \omega = 36 \Leftrightarrow \alpha_1 = 36 - 6 \cdot \omega$ (2)

Η (1) λόγω της (2) γράφεται $2(36 - 6 \cdot \omega) + 9 \cdot \omega = 60 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 72 - 12\omega + 9 \cdot \omega = 60 \Leftrightarrow \omega = 4$ και $\alpha_1 = 12$

Άρα $\alpha_1 = 12, \alpha_2 = 16, \alpha_3 = 20, \ldots, \alpha_{10} = 48$

Άσκηση 3

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της *ν-οστής* σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) α_ν = πλήθος καθισμάτων στη ν-οστή σειρά

οπότε $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu-1)\,20$

β) $\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)\,\omega \Leftrightarrow \alpha_{10} = 120 + (10-1)\,20 \Leftrightarrow \alpha_{10} = 120 + 180 \Leftrightarrow \alpha_{10} = 300$ καθίσματα

γ) Είναι $S_{10} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_{10})10}{2} = \frac{(120+300)10}{2} = 2100$. Άρα το γυμναστήριο έχει συνολικά 2100 καθίσματα.

Άσκηση 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \cdot \lambda^4}{\alpha_1 \cdot \lambda} = 27 \Leftrightarrow \lambda^3 = 27 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow \lambda = 3$

β) Είναι $S_4 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda - 1} = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 \frac{3^4 - 1}{3-1} = 200 \Leftrightarrow 40\alpha_1 = 200 \Leftrightarrow \alpha_1 = 5$

Άσκηση 5

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με 77. (Μονάδες 13)

(Δίνεται : $\sqrt{1849} = 43$) .

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_5 = 14 \Leftrightarrow \alpha_1 + (5-1)\,\omega = 14 \Leftrightarrow 2 + 4\omega = 14 \Leftrightarrow \omega = 3$

β) Πρέπει να είναι $S_\nu = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2} \cdot [2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 77 \Leftrightarrow$

$\frac{\nu}{2} \cdot [4 + (\nu-1)3] = 77 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2} \cdot (3\nu + 1) = 77 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\nu^2 + \frac{\nu}{2} - 77 = 0 \quad 3\nu^2 + \nu - 154 = 0$

Είναι $\Delta = 1849 > 0$ οπότε οι ρίζες είναι $\nu_1 = 7$ (δεκτή) και $\nu_2 = -\frac{44}{6}$ (απορρίπτεται)

Άρα $S_7 = 77$ δηλαδή προσθέτω τους 7 πρώτους όρους.

Άσκηση 6

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά ω = 4 , ισχύει : $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με το μηδέν ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει : $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 5\omega) + (\alpha_1 + 10\omega) = 40 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15\omega = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha_1 + 15 \cdot 4 = 40 \Leftrightarrow \alpha_1 = -10$

β) Πρέπει να είναι $S_\nu = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2} \cdot [2\alpha_1 + (\nu-1)\omega] = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\nu}{2} \cdot (-20 + 4\nu - 4) = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2} \cdot (4\nu - 24) = 0$

$\Leftrightarrow 4\nu - 24 = 0 \Leftrightarrow \nu = 6 \quad (\nu \neq 0)$.

Άρα $S_6 = 0$ δηλαδή πρέπει να προσθέσουμε τους 6 πρώτους όρους της προόδου ώστε το άθροισμα τους να είναι ίσο με το μηδέν.

Άσκηση 7

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν : $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_4 - \alpha_9 = 15 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 15 \Leftrightarrow -5\omega = 15 \Leftrightarrow \omega = -3$

β) Είναι $\alpha_\nu = \nu \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = \nu \Leftrightarrow 41 + (\nu-1)(-3) = \nu \Leftrightarrow 4\nu = 44 \Leftrightarrow \nu = 11$

Άσκηση 8

Δίνεται αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι : $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = 2$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου . (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7} = \frac{(\alpha_1+14\omega)-(\alpha_1+8\omega)}{(\alpha_1+9\omega)-(\alpha_1+6\omega)} = \frac{6\omega}{3\omega} = 2$

β) Είναι $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 14\omega) - (\alpha_1 + 8\omega) = 18 \Leftrightarrow 6\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 3$

Άσκηση 9

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν : $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 3 . (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_{25}=\alpha_{12}+39 \Leftrightarrow \alpha_1+24\omega=\alpha_1+11\omega+39 \Leftrightarrow 13\omega=39 \Leftrightarrow \omega=3$

β) Είναι $\alpha_\nu=152 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega=152 \Leftrightarrow 2+(\nu-1)\cdot 3=152 \Leftrightarrow \nu=51$

Άρα $\alpha_{51}=152$

Άσκηση 10

Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa \in \mathbb{N}$ είναι , με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) .

α) Να αποδείξετε ότι κ = 4 και να βρείτε το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 12)

β) i) Να εκφράσετε το $2^{\text{ο}}$ όρο, τον $5^{\text{ο}}$ και τον $4^{\text{ο}}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1. (Μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $(2\kappa)^2=(\kappa-2)(7\kappa+4) \Leftrightarrow 4\kappa^2=7\kappa^2+4\kappa-14\kappa-8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\kappa^2-10\kappa-8=0$$

$$\Leftrightarrow \kappa=4 \text{ ή } \kappa=-\frac{2}{3} \text{ (απορρίπτεται)}$$

β) i) Ο λόγος $\lambda=\dfrac{2\kappa}{\kappa-2}=\dfrac{8}{2}=4$

Οπότε έχουμε $\alpha_2=\alpha_1\cdot\lambda=4\alpha_1$

$\alpha_5=\alpha_1\cdot\lambda^4=4^4\cdot\alpha_1$

$\alpha_4=\alpha_1\cdot\lambda^3=4^3\cdot\alpha_1$

ii) Είναι $\alpha_2+\alpha_5=4\alpha_1+4^4\cdot\alpha_1=\alpha_1(4+4^4)$ (1)

και $4(\alpha_1+\alpha_4)=4(\alpha_1+4^3\cdot\alpha_1)=4\alpha_1+4^4\cdot\alpha_1=\alpha_1(4+4^4)$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

Άσκηση 11

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1=1$ και $\alpha_3=9$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου . (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν, ώστε να ισχύει $\alpha_\nu>30$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_3=9 \Leftrightarrow \alpha_1+2\omega=9 \Leftrightarrow 1+2\omega=9 \Leftrightarrow \omega=4$

β) Είναι $\alpha_\nu>30 \Leftrightarrow \alpha_1+(\nu-1)\omega>30 \Leftrightarrow 1+(\nu-1)\cdot 4>30 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1+4\nu-4>30 \Leftrightarrow 4\nu>33 \Leftrightarrow \nu>8{,}25 .$$

Άρα ο μικρότερος θετικός ακέραιος είναι ν=9

Άσκηση 12

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει : $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 5 . (Μονάδες 12)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου . (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $\alpha_4 - \alpha_2 = 10 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 3\omega) - (\alpha_1 + \omega) = 10 \Leftrightarrow 2\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 5$

β) Είναι $S_3 = 33 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot [2\alpha_1 + (3-1)\omega] = 33 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot (2\alpha_1 + 2\omega) = 33 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\alpha_1 + 3\omega = 33 \Leftrightarrow 3\alpha_1 + 15 = 33 \Leftrightarrow \alpha_1 = 6$$

Άσκηση 13

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις : $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ= $(-2\beta)^2 - 4(\beta^2 - 4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16 > 0$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$x_1 = \frac{2\beta+4}{2} = \beta - 2 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{2\beta-4}{2} = \beta + 2$$

β) Για να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με τη σειρά που δίνονται πρέπει να ισχύει

$2\beta = x_1 + x_2 \Leftrightarrow 2\beta = \beta - 2 + \beta + 2 \Leftrightarrow 2\beta = 2\beta$ που ισχύει.

Άρα οι αριθμοί x_1, β, x_2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 14

Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1) , με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις : $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ= $(-5\beta)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2\beta^2 = 25\beta^2 - 16\beta^2 = 9\beta^2 > 0$

Οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$$x_1 = \frac{5\beta+3\beta}{4} = 2\beta \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{5\beta-3\beta}{4} = \frac{\beta}{2}$$

β) Για να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με τη σειρά που δίνονται πρέπει να ισχύει

$\beta^2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \beta^2 = 2\cdot\beta\cdot\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \beta^2 = \beta^2$ που ισχύει.

Άρα οι αριθμοί x_1, β, x_2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Άσκηση 15

α) Αν οι αριθμοί $4-x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $2x = 2 + (4-x) \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

β) Ισχύει ότι $x^2 = 2(4-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$

Οπότε $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = -4$

γ) Η τιμή $x = 2$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις των ερωτημάτων α) και β).

Άσκηση 16

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει : $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι ω = 6 . (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου . (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24 \Leftrightarrow (\alpha_1 + 9\omega) - (\alpha_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

β) Είναι $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega = 19 + 19\cdot 6 = 133$

γ) Είναι $S_{20} = \frac{20}{2}\cdot(\alpha_1 + \alpha_{20}) = 10\cdot(19 + 133) = 1520$

Άσκηση 17

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $x + 2$, $(x + 1)^2$, $3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου . (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x = 1$

ii) $x = -1$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι $2(x + 1)^2 = (x + 2) + (3x + 2) \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = -1$

β) i) Για $x = 1$ η διαφορά ισούται $\omega = (x + 1)^2 - (x + 2) \Leftrightarrow \omega = 4 - 3 \Leftrightarrow \omega = 1$

ii) Για $x = -1$ η διαφορά ισούται $\omega = (x + 1)^2 - (x + 2) \Leftrightarrow \omega = -1$

Άσκηση 18

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί x , 2x + 1, 5x + 4, με τη σειρά που δίνονται , να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου . (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν :

i) x = 1

ii) x = −1 (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{2x+1}{x}=\frac{5x+4}{2x+1} \Leftrightarrow (2x + 1)^2 = (5x+4)\cdot x \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

β) Για $x = 1$ ο λόγος γράφεται λ= $\frac{2x+1}{x}=\frac{3}{1}=3$

γ)) Για $x = -1$ ο λόγος γράφεται λ= $\frac{2x+1}{x}=\frac{-1}{-1}=1$

Άσκηση 19

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ω = 2 και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega \Leftrightarrow 0 = \alpha_1 + \omega$ (1)

και $\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega \Leftrightarrow 4 = \alpha_1 + 3\omega$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\alpha_1 = -2$ και ω= 2

β) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Leftrightarrow \alpha_\nu = -2 + (\nu - 1)2 \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4$

Επίσης $\alpha_\nu = 98 \Leftrightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow \nu = 51$

Άρα $\alpha_{51} = 98$

Άσκηση 20

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακέραιων 1, 2, 3, …ν (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 1$.

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι $S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(\alpha_1+\alpha_\nu) \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2}\cdot(1+\nu)$

β) Πρέπει να ισχύει $S_\nu = 45 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}\cdot(1+\nu) = 45 \Leftrightarrow \nu+\nu^2 = 90 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0$

Άρα ν= -10 (απορρίπτεται) ή ν= 9 (δεκτή). Άρα $S_9 = 45$

Άσκηση 21

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει : $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι : $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \cdot \lambda^2$ (1) και $\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^4 \Leftrightarrow 4 = \alpha_1 \cdot \lambda^4$ (2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε έχουμε

$$\frac{\alpha_1 \cdot \lambda^4}{\alpha_1 \cdot \lambda^2} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (αφού είναι } \lambda > 0)$$

Επίσης $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow 1 = \alpha_1 \cdot 2^2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}$

β) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1} \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1} \cdot 2^{-2} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-3}$

Άσκηση 22

Οι αριθμοί Α = 1, Β = x + 4, Γ = x + 8 είναι , με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) .

α) Να βρείτε τη τιμή του x. (Μονάδες 10)

β) Αν x = 1 και ο αριθμός Α είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) ,

i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω . (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με τη σειρά που δίνονται πρέπει να ισχύει

$$2B = A + \Gamma \Leftrightarrow 2(x+4) = 1 + (x+8) \Leftrightarrow 2x + 8 = x + 9 \Leftrightarrow x = 1$$

β) i) Είναι $\omega = B - A = 5 - 1 = 4$

ii) Είναι $\alpha_{20} = \alpha_1 + 19\omega \Leftrightarrow \alpha_{20} = 1 + 19 \cdot 4 \Leftrightarrow \alpha_{20} = 77$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5$^{\text{Ο}}$: ΠΡΟΟΔΟΙ

ΤΟ 4$^{\text{Ο}}$ ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Οι αριθμοί x^2+5, x^2+x, 2x+4,με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4$^{\text{ο}}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. . (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αφού οι παραπάνω αριθμοί με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$2(x^2+x)=(x^2+5)+(2x+4) \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \;\text{ ή }\; x=-3$$

β) i) Είναι $\omega=(x^2+x)-(x^2+5) \Leftrightarrow \omega=x-5$

και επειδή $x=3$ είναι $\omega=3-5 \Leftrightarrow \omega=-2$

ii) Ισχύει ότι $\alpha_4=x^2+5 \Leftrightarrow \alpha_1+3\omega=14 \Leftrightarrow \alpha_1+3(-2)=14 \Leftrightarrow \alpha_1-6=14 \Leftrightarrow \alpha_1=20$

iii) Είναι $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+..+\alpha_{24}=S_{24}-S_{14} \Leftrightarrow$

$S=\frac{24}{2}\cdot[2\alpha_1+(24-1)\omega]-\frac{14}{2}\cdot[2\alpha_1+(14-1)\omega] \Leftrightarrow$

$S=\frac{24}{2}\cdot(2\cdot 20+23\cdot 3)-\frac{14}{2}\cdot(2\cdot 20+13\cdot 3) \Leftrightarrow$

$S=12\cdot 109-7\cdot 79 \Leftrightarrow S=755$

Άσκηση 2

Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8 με $x>0$

α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται ,να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου; (Μονάδες 5)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2,5,8,11,…και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2,4,8,16,…τότε:

i) Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει:$2(S_\nu+24)=\beta_7$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται για να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου πρέπει να ισχύει $2x = 2 + 8 \Leftrightarrow x = 5$. Άρα η διαφορά είναι ω$= 5 - 2 = 3$

β) Οι αριθμοί 2, x, 8 με τη σειρά που δίνονται για να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου πρέπει να ισχύει $x^2 = 2 \cdot 8 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -4$

Για $x = 4$ ο λόγος είναι $\lambda = \frac{4}{2} = 2$ ενώ για $x = -4$ ο λόγος είναι $\lambda = \frac{-4}{2} = -2$

γ) Ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και ω=3 ενώ ο πρώτος όρος της γεωμετρικής προόδου (β_ν) είναι $\beta_1 = 2$ και $\lambda = 2$

i) Είναι $S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot [2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot [4 + (\nu - 1)3] \Leftrightarrow S_\nu = \frac{3\nu^2 + \nu}{2}$

ii) Ισχύει ότι $2(S_\nu + 24) = \beta_7 \Leftrightarrow 2\left(\frac{3\nu^2+\nu}{2} + 24\right) = \beta_1.\lambda^6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu + 48 = 2 \cdot 2^6 \Leftrightarrow 3\nu^2 + \nu - 80 = 0$$

Άρα είναι Δ$= 961$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$\nu_1 = \frac{-1+31}{2} = 5$ και $\nu_2 = \frac{-1-31}{2} = -\frac{32}{6}$ (απορρίπτεται γιατί $\nu \epsilon N^*$)

Άσκηση 3

Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α , β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α) Να αποδείξετε ότι Ε=1 (Μονάδες 10)

β) Αν $\alpha+\beta = 10$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α και β. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τα μήκη α και β. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι Ε=α · β και επειδή οι αριθμοί α, Ε, β, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ισχύει ότι E^2=α · β. Άρα έχουμε $E^2 = E \Leftrightarrow E = 1$ ή $E = 0$ (απορρίπτεται)

β) i) Ισχύουν οι σχέσεις Ε=α · β $\Leftrightarrow$ $\alpha \cdot \beta = 1$ και $\alpha+\beta = 10$

Από τους τύπους Vietta έχουμε $S=\alpha+\beta = 10$ και $P = \alpha \cdot \beta = 1$

Άρα οι α και β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 10x + 1 = 0$

ii) Είναι Δ=96> 0 οπότε ε εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις

$\alpha = \frac{10+4\sqrt{6}}{2} = 5 + 2\sqrt{6}$ και $\beta = \frac{10-4\sqrt{6}}{2} = 5 - 2\sqrt{6}$

Άσκηση 4

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1 = 2$ και η διαφορά της ω$= 3$ (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

S$= (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) \ldots + (\alpha_{31} + 31)$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύουν οι σχέσεις $\alpha_3 = 8 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 8$ (1) και $\alpha_8 = 23 \Leftrightarrow \alpha_1 + 7\omega = 23$ (2)

Από τη σχέση (1) έχουμε $\alpha_1 = 8 - 2\omega$ οπότε από τη (2) έχουμε

$$\alpha_1 + 7\omega = 23 \Leftrightarrow 8 - 2\omega + 7\omega = 23 \Leftrightarrow \omega = 3 \text{ και } \alpha_1 = 2$$

β) Είναι $\alpha_{31} = \alpha_1 + 30\omega = 2 + 30 \cdot 3 = 92$

γ) Είναι S$= (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) \ldots + (\alpha_{31} + 31) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ S$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{31}) + (1 + 2 + \cdots + 31) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ S$= \frac{31}{2}(\alpha_1 + \alpha_{31}) + \frac{31}{2}(1 + 31) \Leftrightarrow$ S$= \frac{31}{2}(2 + 92) + \frac{31}{2}32 = 1953$

Άσκηση 5

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$

α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ό αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύουν οι σχέσεις $\alpha_3 = 10 \Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 10$ (1) και $\alpha_{20} = 61 \Leftrightarrow \alpha_1 + 19\omega = 61$ (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$\alpha_1 = 4 \text{ και } \omega = 3$$

β) Έστω $\alpha_\nu = 333 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 333 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)3 = 333 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\nu = 332 \Leftrightarrow \nu = \frac{332}{3}$ το οποίο είναι αδύνατο γιατί $\nu \epsilon \mathrm{N}^*$.

Άρα ο αριθμός 333 δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου.

γ) Έστω ότι x και y είναι διαδοχικοί αριθμοί της παραπάνω προόδου τότε ισχύει $y = x + 3$. Άρα από τη σχέση $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+3}{3} \Leftrightarrow x = 6$.

Έτσι $\alpha_\nu = 6 \Leftrightarrow 4 + (\nu - 1)3 = 6 \Leftrightarrow 3\nu = 5 \Leftrightarrow \nu = \frac{3}{5}$ το οποίο είναι αδύνατο αφού $\nu \in \mathrm{N}^*$.

Άρα δεν υπάρχουν διαδοχικοί αριθμοί x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

Άσκηση 6

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa + 1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$ τότε:

i) Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$. (Μονάδες 8)

ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ω= $\alpha_3 - \alpha_2 = (\kappa+1)^2 - \kappa^2 = (\kappa+1-\kappa)(\kappa+1+\kappa) = 2\kappa+1$

Άρα η διαφορά ω είναι περιττός αριθμός.

β) i) Είναι $\alpha_2 = \kappa^2 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = \kappa^2 \Leftrightarrow 2 + 2\kappa + 1 = \kappa^2 \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$

Δ= $4 + 12 = 16 > 0$ Άρα $\kappa = -1$ (απορρίπτεται αφού $\kappa > 1$) ή $\kappa = 3$

Έτσι $\omega = 2\kappa + 1 \Leftrightarrow \omega = 7$

ii) Έστω $\alpha_\nu = 1017 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1017 \Leftrightarrow 2 + (\nu-1)7 = 1017 \Leftrightarrow \nu = 146$.

Άρα είναι $\alpha_{146} = 1017$

Άσκηση 7

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$ (Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$ (Μονάδες 6)

γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30; (Μονάδες 7)

δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60; (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = (\alpha_1 + 19\omega) - (\alpha_1 + 9\omega) = 10\omega$

β) Ισχύει ότι $10\omega = 30 \Leftrightarrow \omega = 3$.

Άρα $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)3 \quad \Leftrightarrow \alpha_\nu = 3\nu - 2$ με $\nu \in \mathbb{N}^*$

γ) Πρέπει να ισχύει $\alpha_\nu > 30 \Leftrightarrow 3\nu - 2 > 30 \Leftrightarrow \nu > \frac{32}{3}$ άρα $\nu = 11$. Οπότε ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30 είναι ο α_{11}.

δ) Πρέπει να ισχύει $\alpha_\nu < 60 \Leftrightarrow 3\nu - 2 < 60 \Leftrightarrow \nu < \frac{62}{3}$.Επειδή $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι οι όροι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{20}$ είναι μικρότεροι του 60, δηλαδή οι 20 πρώτοι όροι της προόδου.

Άσκηση 8

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$\alpha_3 = 4$, $\alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν). (Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\alpha_5 = 16 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^4 = 16$ (1) και $\alpha_3 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^2 = 4$ (2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) οπότε έχουμε: $\frac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda^2} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (είναι $\lambda > 0$).

Από τη σχέση (2) έχουμε $\alpha_1 2^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1$.

β) Έχουμε $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}}{\frac{1}{\alpha_\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$.

Άρα η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda' = \frac{1}{2}$

γ) Είναι $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} = 1$, οπότε έχουμε

$$\frac{S'_{10}}{S_{10}} = \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1}}{\frac{2^{10} - 1}{2 - 1}} = -2\,\frac{\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}}{2^{10} - 1} = \frac{1}{2^9} \quad \text{άρα } S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$

Άσκηση 9

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3,7,11,15,… και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Επειδή οι διαδοχικοί όροι διαφέρουν κατά 4 μονάδες είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$.

β) Είναι $S_{40} = \frac{40}{2} \cdot [2\alpha_1 + (40 - 1)\omega] = 20(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) = 20 \cdot 162 = 3240$

γ) Έστω ότι $\alpha_\nu = 120 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 \Leftrightarrow 3 + (\nu - 1) \cdot 4 = 120 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \nu = \frac{121}{4} \Leftrightarrow \nu = 32{,}5 \text{ αδύνατο γιατί } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Άρα ο αριθμός 120 δεν είναι ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς.

δ) Πρώτα θα βρούμε την τάξη του όρου 235 άρα

$\alpha_\nu = 235 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 235 \Leftrightarrow 3 + (\nu - 1) \cdot 4 = 235 \Leftrightarrow \nu = 59$

άρα $\alpha_{59} = 235$. Έτσι το άθροισμα των όρων του Γιώργου είναι

$$S = \alpha_{41} + \alpha_{42} + \alpha_{43} + \cdots + \alpha_{59} = S_{59} - S_{40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{59}{2}(2 \cdot 3 + 58 \cdot 4) - \frac{40}{2}(2 \cdot 3 + 39 \cdot 4) \Leftrightarrow S = 3781$$

Άσκηση 10

Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1m, με τον ακόλουθο τρόπο: Ξεκινάει από ένα άκρο του κλαδιού και το $1^{ο}$ λεπτό προχωράει 1cm,το $2^{ο}$ λεπτό προχωράει 3cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2cm μεγαλύτερη από αυτή που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο $α_ν$ αυτής της προόδου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

(Μονάδες 4)

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: το $1^{ο}$ λεπτό προχωράει 1cm, το $2^{ο}$ λεπτό προχωράει 2cm ,το $3^{ο}$ λεπτό προχωράει 4cm και, γενικά κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτή που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο $β_ν$ αυτής της προόδου.

(Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1cm. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Αν $α_ν$ είναι η απόσταση που διανύει το μυρμήγκι το ν-οστό λεπτό ισχύει ότι $α_{ν+1} - α_ν = 2$. Άρα οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $α_1 = 1$ και διαφορά $ω = 2$.

β) Η συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα 5 πρώτα λεπτά της κίνησής του είναι

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot [2α_1 + (5-1)ω] \Leftrightarrow S_5 = \frac{5}{2} \cdot (2 \cdot +4 \cdot 2) \Leftrightarrow S_5 = 25\text{cm}.$$

γ) Πρέπει να ισχύει $S_ν = 100 \Leftrightarrow \frac{ν}{2} \cdot [2α_1 + (ν-1)ω] = 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{ν}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (ν-1) \cdot 2] = 100 \Leftrightarrow ν^2 = 100 \Leftrightarrow ν = 10 \ \text{ με } \ ν \epsilon N^*.$$

Άρα θα χρειαστεί 10 λεπτά.

δ) i) Αν $β_ν$ είναι η απόσταση που διανύει η αράχνη το ν-οστό λεπτό της κίνησής του τότε ισχύει ότι $\frac{β_{ν+1}}{β_ν} = 2$. Άρα οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό είναι γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο $β_1 = 1$ και λόγο λ= 2.

Ο ν-στός όρος της προόδου είναι $β_ν = β_1 \cdot λ^{ν-1} \Leftrightarrow β_ν = 2^{ν-1}$

ii) Μετά από ν λεπτά η αράχνη θα έχει διανύσει $S'_\nu = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$cm

και το μυρμήγκι $S_\nu = \frac{\nu}{2} \cdot [2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2] = \nu^2$cm.

Πρέπει να ισχύει ότι $2^\nu - 1 = (100 - \nu^2) - 1$ με ν=1,2,…,10

Άρα $2^\nu + \nu^2 = 100$ με ν=1,2,…,10.Βλέπουμε ότι για $\nu = 6$ η παραπάνω σχέση ισχύει οπότε μετά από 6 λεπτά θα βρεθούν αντιμέτωποι σε απόσταση 1cm.

Άσκηση 11

Μία οικογένεια προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δύο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον $1^\text{ο}$ μήνα 1 ευρώ, το $2^\text{ο}$ μήνα 2 ευρώ, τον $3^\text{ο}$ μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον $1^\text{ο}$ μήνα 100 ευρώ, το $2^\text{ο}$ μήνα 110 ευρώ, τον $3^\text{ο}$ μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν-οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το ν-οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 4)

iii) Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α. (Μονάδες 5)

iv) Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β. (Μονάδες 5)

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα τα συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

ΛΥΣΗ

α) i) Το πρόγραμμα Α είναι μία γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$.

Ο ν-οστός όρος της είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1}$

ii) Το πρόγραμμα Β είναι μία αριθμητική πρόοδος με $\beta_1 = 100$ και $\omega = 10$.

Ο ν-οστός όρος της είναι $\beta_\nu = 100 + (\nu - 1) \cdot 10 \Leftrightarrow \beta_\nu = 90 + 10 \cdot \nu$

iii) Το ποσό A_ν ύστερα από ν μήνες θα είναι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου. Έτσι είναι:

$$A_\nu = 1 \cdot \frac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^\nu - 1$$

iv) Το ποσό B_ν ύστερα από ν μήνες θα είναι το άθροισμα των ν πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου. Έτσι είναι:

$$B_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{\nu}{2}(100 + 90 + 10\nu) = \frac{\nu}{2}(190 + 10\nu) = 5\nu^2 + 95\nu$$

β) i) Ύστερα από 6 μήνες το ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό σύμφωνα με το πρόγραμμα Α θα είναι $A_6 = 2^6 - 1 = 63$ ευρώ.

Ύστερα από 6 μήνες το ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι $B_6 = 5 \cdot 6^2 + 95 \cdot 6 = 750$ ευρώ.

ii) Ύστερα από 12 μήνες το ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό σύμφωνα με το πρόγραμμα Α θα είναι $A_{12} = 2^{12} - 1 = 4095$ ευρώ.

Ύστερα από 12 μήνες το ποσό που θα υπάρχει στο λογαριασμό σύμφωνα με το πρόγραμμα Β θα είναι $B_{12} = 5 \cdot 12^2 + 95 \cdot 12 = 1860$ ευρώ.

Άρα το ποσό θα είναι μεγαλύτερο σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο}: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΤΟ 2^{Ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in R$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(-1) + f(0) + f(1) = [(-1)^2 + 2(-1) - 15] + (0^2 + 2 \cdot 0 - 15) + (1^2 + 2 \cdot 1 - 15) =$

$$= -16 - 15 - 12 = -43$$

β) Για x= 0 είναι $f(0) = -15$.

Άρα η γραφική παράστασης της f τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Α(0, –15).

Για να βρούμε που τέμνει η γραφική παράστασης της f τον άξονα x΄x λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Η εξίσωση έχει Δ= $64 > 0$ οπότε έχει δύο ρίζες τις x= $\frac{-2+8}{2} = 3$ ή x= $\frac{-2-8}{2} = -5$.

Άρα η γραφική παράστασης της f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Β(–5,0) και Γ(3,0).

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 0 \\ x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$ (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in R$, ώστε $f(x) = 0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(-1) = 2(-1) + 4 = 2$ και $f(3) = 3 - 1 = 2$

Άρα $f(-1) = f(3)$

β) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) Για $x < 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (δεκτή)

ii) Για $x \geq 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (δεκτή).

Άσκηση 3

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6. (Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x)=\frac{1}{x-3}$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ= $(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=1>0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x=\frac{5+1}{2}=3 \text{ ή } x=\frac{5-1}{2}=2.$$

Άρα το τριώνυμο γράφεται ισοδύναμα $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

β) i) Πρέπει $x^2-5x+6\neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ και $x\neq 2$

Άρα A= $R-\{2,3\}$

ii) Είναι $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}=\frac{x-2}{(x-3)(x-2)}=\frac{1}{x-3}$

Άσκηση 4

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\frac{1+x}{x-1}$ και $B=\frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει:

$$x\neq 1 \quad \text{και} \quad x\neq 0$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει A=B. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για την παράσταση A πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

β) Για την παράσταση B πρέπει $x^2-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq 0$.

Άρα για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει:

$$x\neq 1 \quad \text{και} \quad x\neq 0$$

β) Είναι A=B$\Leftrightarrow\frac{1+x}{x-1}=\frac{2}{x^2-x}\Leftrightarrow 2(x-1)=(x^2-x)(1+x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)-(x^2-x)(1+x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)-x(x-1)(1+x)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[2-x(1+x)]=0\Leftrightarrow$$

$x=1$ (απορρίπτεται) ή $2-x(1+x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$.

Είναι Δ=9> 0 άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x=1$ (απορρίπτεται) ή $x=-2$ (δεκτή).

Άσκηση 5

Δίνεται η παράσταση Β= $\sqrt[5]{(\mathrm{x}-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για x=4,να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}^2+6\mathrm{B}=\mathrm{B}^4$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $(\mathrm{x}-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \geq 2.$ Άρα x$\in [2,+\infty)$.

β) Για x=4 είναι Β= $\sqrt[5]{(4-2)^5}=\sqrt[5]{2^5}=2$

Άρα έστω ότι $\mathrm{B}^2+6\mathrm{B}=\mathrm{B}^4 \Leftrightarrow 2^2+6\cdot 2=2^4 \Leftrightarrow 4+12=16$ το οποίο ισχύει.

Άσκηση 6

Δίνεται η παράσταση Α= $\sqrt{1-\mathrm{x}}-\sqrt[4]{\mathrm{x}^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για x=−3,να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}^3+\mathrm{A}^2+\mathrm{A}+1=0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα $1-\mathrm{x} \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \leq 1$ και $\mathrm{x}^4 \geq 0 \Leftrightarrow\in\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}$

Άρα x$\in (-\infty,1]$.

β) Για x=−3 είναι Α= $\sqrt{1-(-3)}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{4}-\sqrt[4]{3^4}=2-3=-1$

Άρα $\mathrm{A}^3+\mathrm{A}^2+\mathrm{A}+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=0$

Άσκηση 7

Δίνεται η παράσταση Α= $\sqrt{\mathrm{x}^2+4}-\sqrt{\mathrm{x}-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για x=4,να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $\mathrm{x}^2+4 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 \geq -4$ που ισχύει για κάθε $\mathrm{x} \in \mathrm{R}$ και επίσης πρέπει $\mathrm{x}-4 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \geq 4$. Άρα πρέπει x$\in [4,+\infty)$.

β) Για x=4 είναι Α= $\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\cdot\sqrt{5}$

Άρα $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}=\left(2\cdot\sqrt{5}\right)^2-2\cdot\sqrt{5}=20-2\cdot\sqrt{5}=2\cdot\left(10-\sqrt{5}\right)$

Άσκηση 8

Δίνεται η παράσταση Α= $\sqrt{\mathrm{x}-4}+\sqrt{6-\mathrm{x}}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό τη μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για x=5,να αποδείξετε ότι : $\mathrm{A}^2+\mathrm{A}-6=0$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ και επίσης
πρέπει $6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$.
Άρα οι κοινές λύσεις είναι $4\leq x\leq 6$ ή $x\in[4,6]$.

β) Για x=5 είναι Α= $\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=1+1=2$.
Άρα $A^2+A-6=2^2+2-6=0$.

Άσκηση 9

Δίνεται η παράσταση Α= $(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.
(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ και επίσης
πρέπει $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.
Άρα οι κοινές λύσεις είναι $x\geq 4$.

β) Είναι Α= $\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Α= $(x-4)-(x+1)=-5$.
Άρα Α= -5 όποτε η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι Α= $(-\infty,10)$.

β) Είναι $f(-1)=2(-1)-5=-2-5=-7$
$f(3)=2\cdot 3-5=6-5=1$
$f(5)=5^2=25$

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
i) Για $x\leq 3$: $f(x)=25\Leftrightarrow 2x-5=25\Leftrightarrow x=15$, απορρίπτεται γιατί πρέπει $x\leq 3$.
ii) Για $3<x<10$: $f(x)=25\Leftrightarrow x^2=25\Leftrightarrow x=5$ (δεκτή) ή $x=-5$ (απορρίπτεται)

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$.
(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να είναι $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Άρα Α= $R-\{3\}$.

β) Είναι $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ γιατί Δ= $1>0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις $x=2$ και $x=3$.

Άρα $f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} \Leftrightarrow f(x)= x-2$.

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Άρα η γραφική παράστασης της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α(2,0).

Επίσης για x= 0 έχουμε $f(0)= 0-2=-2$. Άρα η γραφική παράστασης της f τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο Β(0,−2).

Άσκηση 12

Δίνονται οι παραστάσεις Α=$\sqrt{(x-2)^2}$ και Β= $\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου $x \in R$.
α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; (Μονάδες 7)
β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; (Μονάδες 8)
γ) Να δείξετε ότι, για κάθε x$\leq$ 2, ισχύει Α=Β (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $(x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in R$.

β) Πρέπει να ισχύει $(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

γ) Για $x \leq 2$ είναι $|x-2|=2-x$

Άρα Α=$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=2-x$ και Β= $\sqrt[3]{(2-x)^3}=2-x$.

Άρα ισχύει Α=Β.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\frac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(1,−4),
α) Να δείξετε ότι μ= -6 (Μονάδες 9)
β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 9)
γ) Για μ= -6 να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο Α(1,−4),

ισχύει $g(1)=-4 \Leftrightarrow \frac{2\cdot1^2-4\cdot1+\mu}{1+1}=-4 \Leftrightarrow \frac{2-4+\mu}{2}=-4 \Leftrightarrow \mu=-6$.

β) Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.Άρα Α= $R-\{1\}$.

γ) Είναι $g(x)=\frac{2x^2-4x-6}{x+1}=\frac{2(x^2-2x-3)}{x+1}=\frac{2(x+1)(x-3)}{x+1}$ =2(x−3)

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$ (Μονάδες 10)

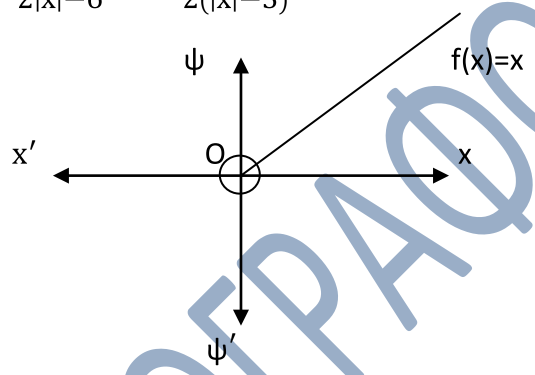
γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -3$. Άρα A= $\mathbb{R} - \{-3,3\}$

β) Είναι $f(x) = \dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6} = \dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6} = \dfrac{2|x|^2-6|x|}{2|x|-6} = \dfrac{2|x|(|x|-3)}{2(|x|-3)} = |x|$.

γ) Για $x > 0$ είναι $|x| = x$. Άρα $f(x) = x$.



Άσκηση 15

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε. (Μονάδες 13)

β) Αν A,O,B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου O(0,0), να αποδείξετε ότι A,B είναι συμμετρικά ως προς το O. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής των συναρτήσεων f,g λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1 .$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα A(–1,–1), O(0,0) και B(1,1).

β) Τα σημεία A και ο B είναι συμμετρικά ως προς το O γιατί έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

Άσκηση 16

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

A= $x^3 - x^2 + 3x - 3$. (Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το A(1,3). (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Α= $x^3 - x^2 + 3x - 3 = x^2(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2+3)$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των συναρτήσεων f, g λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x^2 + 3 = 0 \text{ (αδύνατη)}.$$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο είναι το Α(1,3).

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: Α=$f(\frac{1}{2}) + f(1) - f(2)$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Α=$f(\frac{1}{2}) + f(1) - f(2) = (\frac{1}{2} + 2) + (1+1) - \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 2$

β) Είναι $f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

Άρα Δ= $(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$.

Οπότε $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ και $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

Άσκηση 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 32$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει $x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ Άρα Α= $\mathbb{R} - \{4\}$

Είναι $f(x) = \frac{x^3-16x}{x-4} = \frac{x(x^2-16)}{x-4} = \frac{x(x+4)(x-4)}{x-4} = x(x+4) = x^2 + 4x$.

β) Είναι $f(x) = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 32 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$

Άρα Δ= $4^2 - 4 \cdot (-32) = 16 + 128 = 144 > 0$.

Οπότε $x_1 = \frac{-4+12}{2} = 4$ (απορρίπτεται) ή $x_2 = \frac{-4-12}{2} = -8$

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} 8 - x, & x < 0 \\ 2x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$ (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in R$, ώστε $f(x) = 9$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(-5) = 8 - (-5) = 13$ και $f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 13$. Άρα $f(-5) = f(4)$.

β) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Για $x < 0$ είναι $f(x) = 9 \Leftrightarrow 8 - x = 9 \Leftrightarrow x = -1$ (δεκτή)

ii) Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = 9 \Leftrightarrow 2x + 5 = 9 \Leftrightarrow x = 2$(δεκτή).

Άσκηση 20

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ= $2^2 - 4 \cdot (-3) = 16 > 0$.

Οπότε $x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$ ή $x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$.

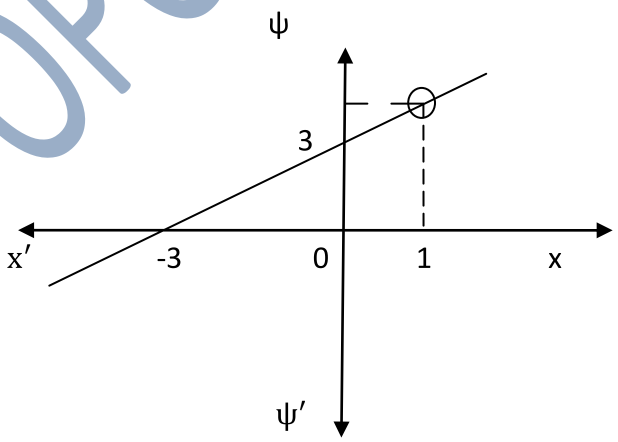
Άρα $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$

β) Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Άρα A= $R - \{1\}$.

Είναι $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = x + 3$.

γ) Για x= 0 είναι $f(0) = 0 + 3 = 3$

Για ψ= 0 είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$



Άσκηση 21

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 2x - 1$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $|A(x)| = 1$ (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ= $(-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-1) = 16 > 0$.

Οπότε $x_1 = \frac{2+4}{6} = 1$ ή $x_2 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$. Άρα $3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

β) Πρέπει $3x^2 - 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -\frac{1}{3}$.Άρα Α= $R - \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$.

γ) Είναι $|A(x)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{3x^2-2x-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{3(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{(3x+1)}\right| = 1$

- $\frac{1}{3x+1} = 1 \Leftrightarrow 3x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $\frac{1}{3x+1} = -1 \Leftrightarrow 3x+1 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

Άσκηση 22

Δίνεται η συνάρτηση : Κ= $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση Κ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα

$x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$ και

$x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$ και

$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Άρα Α= $R - \{-2,3\}$

β) Είναι Κ= $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Κ= $\frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} \Leftrightarrow$ Κ= $\frac{x+2}{x+2} + \frac{x-3}{x-3} = 1 + 1 = 2$

γιατί $-2 < x \Leftrightarrow 0 < x + 2$ και $x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$.

Άσκηση 23

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση : $y = 35 + 0{,}8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά; (Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α; (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά είναι:

Για x= 25: y= $35 + 0{,}8 \cdot 25 = 35 + 20 = 55$ χιλιόμετρα.

β) Εφόσον το αυτοκίνητο απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α τότε:

Για ψ= 75: y= $35 + 0{,}8 \cdot x = 75 \Leftrightarrow 0{,}8\,x = 40 \Leftrightarrow x = 50$ λεπτά.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f\,(x) = \frac{1}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M(\alpha,\frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -1$

Άρα Α= $R - \{-1,1\}$.

β) Αφού το σημείο $M(\alpha,\frac{1}{8})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τότε ισχύει

$$f\,(\alpha) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2-1} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow \alpha^2 = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -3$$

Άσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f\,(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x^2 - x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x \neq 3$.

Άρα Α= $R - \{-2,3\}$.

β) Είναι $f(2) + f(4) = \frac{2+2}{2^2-2-6} + \frac{4+2}{4^2-4-6} = \frac{4}{-4} + \frac{6}{6} = 0$

Άσκηση 26

Δίνεται η παράσταση Κ= $\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in R$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι Δ= $(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$.

Οπότε $x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$ ή $x_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$. Άρα $2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

β) Πρέπει να ισχύει $2x^2-3x-2\neq 0 \Leftrightarrow 2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\neq 0 \Leftrightarrow\ x\neq 2$ και $x\neq -\frac{1}{2}$.

Άρα Α= $R-\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$.

γ) Είναι Κ= $\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x-2)^2}{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x-2}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{x-2}{2x+1}$

Άσκηση 27

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq -1$. Άρα Α= $R-\{-1,1\}$.

β) Είναι Δ= $(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$.

Οπότε $x_1=\frac{5-1}{4}=1$ ή $x_2=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$. Άρα $2x^2-5x+3=2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$.

γ) Είναι για κάθε $x\in A=\ R-\{-1,1\}$

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}=\frac{2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x+1}=\frac{2x-3}{x+1}$$

Άσκηση 28

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,6), Β(−1,4) να βρείτε τις τιμές των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν α= 1 και $\beta=5$ να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x′x και ψ′ψ. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,6), Β(−1,4) τότε ισχύει: $f(1)=6 \Leftrightarrow \alpha+\beta=6$ (σχέση 1)

και $f(-1)=4 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=4$ (σχέση 2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε έχουμε: $2\beta=10 \Leftrightarrow \beta=5$ και $\alpha=1$.

Άρα $f(x)=x+5$

β) Για x= 0 έχουμε $f(0)=0+5=5$. Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα ψ′ψ στο σημείο Α(0, −5)

Για ψ= 0 έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Β(−5,0)

Άσκηση 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(0) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 5 \Leftrightarrow \beta = 5$

και $f(1) = 3 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta = 3 \Leftrightarrow \alpha + 5 = 3 \Leftrightarrow \alpha = -2$.

Άρα $f(x) = -2x + 5$

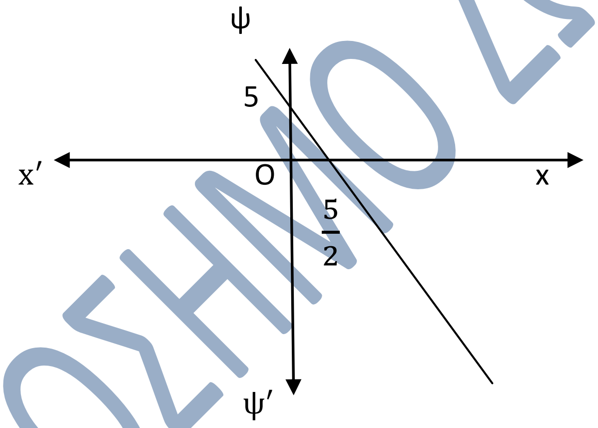
β)) Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = -2 \cdot 0 + 5 = 5$

Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο $A(0,5)$.

Για $\psi = 0$ έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(\frac{5}{2}, 0)$.

γ)



Άσκηση 30

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

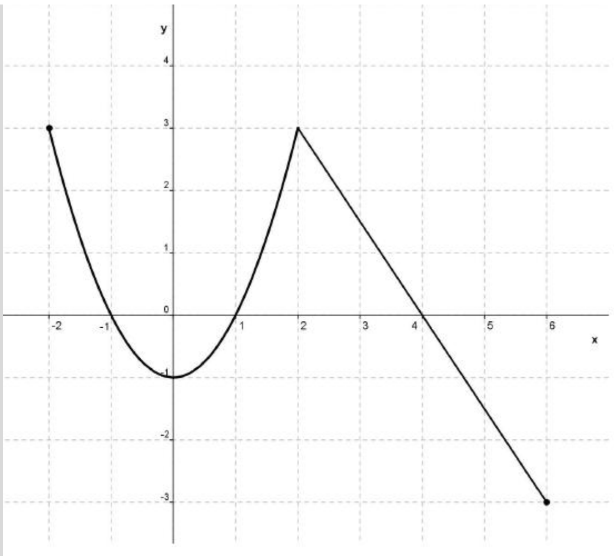
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές. (Μονάδες 7)



ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f από το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων είναι x$\in [-3{,}8]$.

β)

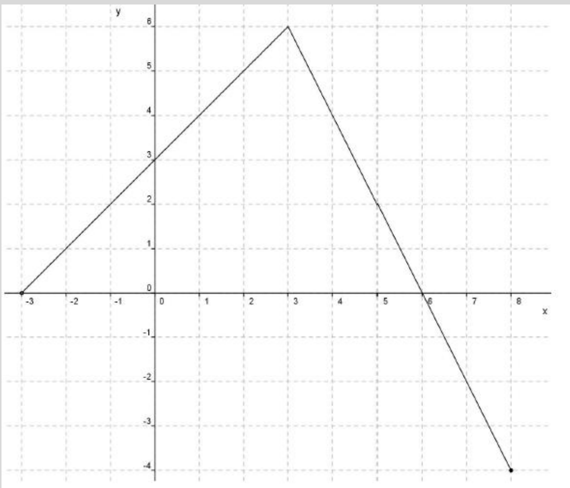
x	-3	-1	0	3	7	8
ψ	0	2	3	6	-2	-4

γ) Με τον άξονα ψ′ψ το σημείο τομής είναι το Α(0,3) ενώ με τον άξονα $x'x$ το σημείο τομής είναι το Β(6,0).

δ) Η συνάρτηση f παίρνει θετικές τιμές αν $f\,(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3{,}6)$.

Άσκηση 31

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1		1	2	
y			–1			-3

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες. (Μονάδες 6)
δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f από το παρακάτω σύστημα συντεταγμένων είναι x$\in [2,6]$.

β)

x	–2	–1	0	1	2	6
y	3	1	–1	1	3	–3

γ) Με τον άξονα $\psi'\psi$ το σημείο τομής είναι το Α(0,–1) ενώ με τον άξονα $x'x$ το σημεία τομής είναι τα Β(–1,0), Γ(1,0) και Δ(4,0).

δ) Η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές αν $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1) \cup (4,6]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο} : ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΤΟ 4^{ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Αν ένας κάτοικος μίας πόλης Α καταναλώνει κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πληρώνει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0{,}5x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 30 \\ 0{,}7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i) έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό. (Μονάδες 2)

ii) έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 3)

iii) έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 5)

β) Σε μία άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί στην κατανάλωση κυβικών x μέτρων δίνεται από τον τύπο $g(x)=12+0{,}6x$, για $x\geq 0$.

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού για το 2013.Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού. (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Αφού ο άνθρωπος έλειπε από το σπίτι τότε για $x = 0$: $f(0) = 12 + 0{,}5 \cdot 0 = 12$

β) Για $x = 10$: $f(10) = 12 + 0{,}5 \cdot 10 = 12 + 5 = 17$

γ) Για $x = 50$: $f(50) = 0{,}7 \cdot 50 + 6 = 35 + 6 = 41$

β) Έστω ότι έχουν καταναλώσει $0 \le x \le 30$ κυβικά μέτρα νερού. Οπότε ισχύει:

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 12 + 0{,}5x > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow 0{,}5x > 0{,}6x \Leftrightarrow 5x > 6x \Leftrightarrow x < 0$ (Αδύνατο).

Άρα έχουν καταναλώσει $x \ge 30$ κυβικά μέτρα νερού. Οπότε ισχύει:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 0{,}7x + 6 > 12 + 0{,}6x \Leftrightarrow 0{,}1x > 6 \Leftrightarrow x > 60.$$

Άρα ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

Άσκηση 2

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x + \alpha$, με $x \in R$ και $\alpha \in R$.

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία. (Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για $\alpha = 1$ είναι $g(x) = x + 1$. Οπότε για να προσδιορίσουμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g πρέπει:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

Άρα για $x = 1$ είναι $\psi = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ οπότε το σημείο τομής είναι το Α(1,2).

Για $x = 0$ είναι $\psi = f(0) = 0^2 + 1 = 1$ οπότε το σημείο τομής είναι το Β(0,1).

β) Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + \alpha \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία πρέπει η παραπάνω εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Οπότε: $\Delta > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1-\alpha) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4 + 4\alpha > 0 \Leftrightarrow 4\alpha > 3 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{4}$.

γ) Αφού $\alpha > 1 > \frac{3}{4}$ τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία. Άρα $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \alpha = 0$.

Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες τότε από τους τύπους Vietta έχουμε: $P = x_1 \cdot x_1 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1 - \alpha < 0$. Άρα οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ετερόσημες.

Άσκηση 3

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 km; (Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο όποιος για μία μέρα πλήρωσε 150 ευρώ; (Μονάδες 5)

γ) Μία άλλη εταιρεία Β χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε. (Μονάδες 10)

δ) Αν $f(x) = 60 + 0{,}20x$ και $g(x) = 80 + 0{,}10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή της καθεμίας από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (γ). (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 400$ έχουμε: $y = 60 + 0{,}20 \cdot 400 = 60 + 80 = 140$ ευρώ.

β) Για y= 150 έχουμε: $150 = 60 + 0{,}20x \Leftrightarrow 90 = 0{,}20x \Leftrightarrow x = 450$ km.

γ) Έστω ότι συμφέρει να επιλέξουμε την εταιρεία Α τότε:

$$60 + 0{,}20x < 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow 0{,}10x < 20 \Leftrightarrow x < 200.$$

Άρα για $x < 200$ km συμφέρει η εταιρεία Α.
Για $x > 200$ km συμφέρει η εταιρεία Β.
Για $x = 200$ km πληρώνουμε το ίδιο ποσό και στις δύο εταιρείες.

δ) Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 60 + 0{,}20x = 80 + 0{,}10x \Leftrightarrow 0{,}10x = 20 \Leftrightarrow x = 200.$

Άρα για $x = 200$ είναι $y = 100$. Δηλαδή αν κάποιος διανύσει 200km είτε με την εταιρεία Α είτε με την εταιρεία Β θα πληρώσει το ίδιο ποσό 100 ευρώ.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|2 - x|}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{αν } x > 2 \\ -x + 3, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$ (Μονάδες 7)

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 8)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $|2-x| \neq 0 \Leftrightarrow 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

β) Για $x > 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$

Για $x < 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2-x} = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = -x+3$

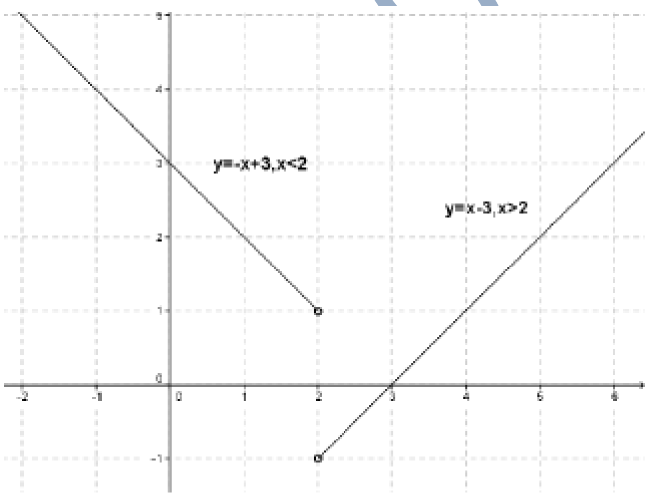
Άρα $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{αν } x > 2 \\ -x+3, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$

γ) Για $x > 2$ είναι ψ= $x-3$

x	2	3
ψ	-1	0

Για $x < 2$ είναι ψ= $-x+3$

x	2	0
ψ	1	3



Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α(3,0) και τον άξονα $y'y$ στο σημείο Β(0,3).

δ) Για $x > 2$ είναι $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. Άρα $x \in (2,3]$.

Για $x < 2$ είναι $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. (αδύνατη).

Άρα $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (2,3]$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$ όπου α$\in R$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 5)

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 2x - \alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $2x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{3}{2}$. Άρα Α= $R-\left\{\frac{3}{2}\right\}$

β) Είναι $f(x)=\frac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}=\frac{(2x-3)(2x-\alpha)}{2x-3}=2x-\alpha$

γ) Ισχύει $f(1)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 1-\alpha=-1 \Leftrightarrow 2-\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=3$

δ) Για $y=0$ είναι $0=2x-\alpha \Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Α($\frac{\alpha}{2}$,0).

Για $x=0$ είναι $y=f(0)=2\cdot 0-\alpha=-\alpha$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα$y'y$ στο σημείο Β($0,-\alpha$).

Άσκηση 6

Δύο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν χόμπι τη δουλειά τους. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μία μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση Κ(x)= 12,5x + 120 και τα έξοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διαστήματα ενός μηνός, από τη συνάρτηση Ε(x) = 15,5x.

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης; (Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση) (Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την σας. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Τα πάγια έξοδα είναι για $x=0$. Οπότε Κ(0)= 12,5· 0 + 120=120 ευρώ.

β) Ο αριθμός 12,5 εκφράζει το κόστος κατασκευής μίας μπλούζας ενώ ο αριθμός 15,5 εκφράζει την είσπραξη από την πώληση μίας μπλούζας.

γ) Για να μην μπαίνει μέσα η επιχείρηση πρέπει η είσπραξη να είναι μεγαλύτερη από το κόστος. Άρα πρέπει Ε(x)> $K(x) \Leftrightarrow 15{,}5x>$12,5x + 120 ⇔ 3x> 120 ⇔x> 40.

Οπότε θα πρέπει να πουληθούν τουλάχιστον 40 μπλουζάκια ώστε η επιχείρηση να μην μπαίνει μέσα.

δ) Αφού τα μπλουζάκια που θα πωληθούν είναι πάνω από 40 τότε θα υπάρχει κέρδος.

Το κέρδος είναι Ε(60)$-K(60)=15{,}5\cdot 60-(12{,}5\cdot 60+120)=60$ ευρώ.

Άσκηση 7

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράφει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος *h* (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή *t* (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση :

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$$

α) Να βρείτε τις τιμές *h* (0), *h* (1) και *h* (2) και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή *t* μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5[\,1{,}21-(t-1)^2]$$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος *h* της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από το 6,05m. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Για $t=0$ είναι $h(0) = -5\cdot 0^2 + 10\cdot 0 + 1{,}05 = 1{,}05$

Αυτό σημαίνει ότι η αρχική θέση της μπάλα είναι σε ύψος 1,05 m.

Για $t=1$ είναι $h(1) = -5\cdot 1^2 + 10\cdot 1 + 1{,}05 = 6{,}05$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από 1 sec η θέση της μπάλα είναι σε ύψος 6,05 m.

Για $t=2$ είναι $h(1) = -5\cdot 2^2 + 10\cdot 2 + 1{,}05 = -20 + 20 + 1{,}05 = 1{,}05$

Αυτό σημαίνει ότι μετά από 2 sec η θέση της μπάλα είναι σε ύψος 1,05 m.

β) Όταν η μπάλα φτάσει στο έδαφος τότε:

$h(t) = 0 \Leftrightarrow -5t^2 + 10t + 1{,}05 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4(-5)\cdot 1{,}05 = 121 > 0$. Άρα

$t_1 = \frac{-10+11}{-10} = \frac{-1}{10} < 0$ (απορρίπτεται διότι $t \geq 0$) και

$t_2 = \frac{-10-11}{-10} = \frac{21}{10} > 0$ (δεκτή).

γ) Είναι $h(t) = 5[\,1{,}21-(t-1)^2] \Leftrightarrow h(t) = 5(1{,}21 - t^2 + 2t - 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h(t) = 5(-t^2 + 2t + 0{,}21) \Leftrightarrow h(t) = -5t^2 + 10t + 1{,}05$$

δ) Πρέπει

$$h(t) > 6{,}05 \Leftrightarrow -5t^2 + 10t + 1{,}05 > 6{,}05 \Leftrightarrow -5t^2 + 10t - 5 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5(t^2 - 2t + 1) > 0 \Leftrightarrow -5(t-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 < 0, \quad \text{αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος *h* της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από το 6,05m.

Άσκηση 8

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια , μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d + 1) cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια κάθε πλακάκι τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αφού τα πλακάκια τύπου Α είναι τετράγωνα με πλευρά d cm τότε το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α είναι $E_A = d^2\ cm^2$.

Αφού τα πλακάκια τύπου Β είναι τετράγωνα με πλευρά (d+1) cm τότε το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Β είναι $E_B = (d+1)^2\ cm^2$.

β) i) Ισχύει $200E_A = 128E_B \Leftrightarrow 200d^2 = 128(d+1)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 200d^2 = 128(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow 200d^2 = 128d^2 + 256d + 128 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72d^2 - 256d - 128 = 0 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0$$

$\Delta = (-32)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-16) = 1024 + 576 = 1600.$

$d_1 = \frac{32-40}{18} = \frac{-8}{18} < 0$ (απορρίπτεται διότι $d \geq 0$) και

$d_2 = \frac{32+40}{18} = \frac{72}{18} = 4 > 0$ (δεκτή).

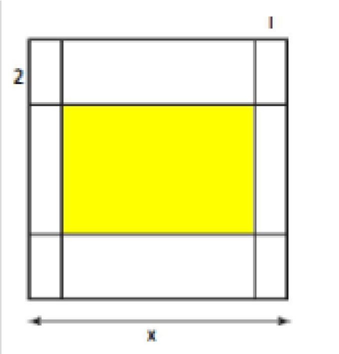
Οπότε τα πλακάκια τύπου Α είναι τετράγωνα με πλευρά d= 4 cm ενώ τα πλακάκια τύπου Β είναι τετράγωνα με πλευρά d+1 = 5 cm.

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν είναι :

$E = 200E_A = 200 \cdot 4^2 = 3200\ cm^2$

Άσκηση 9

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση :

$E(x) = (x-2)\,(x-4)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Οι πλευρές της περιοχής τύπωσης είναι $x-2$ cm και $x-4$ cm. Οπότε αφού είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε $E(x) = (x-2)(x-4)$.

β) Είναι $E(x) = 35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 35 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 = 35 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 = 0.$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144.$

$x_1 = \dfrac{6-12}{2} = -3 < 0$ (απορρίπτεται διότι $5 \le x \le 10$) και

$x_2 = \dfrac{6+12}{2} = 9 > 0$ (δεκτή).

γ) Είναι $E(x) \ge 24 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \ge 24 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 \ge 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 \ge 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100.$

$x_1 = \dfrac{6-10}{2} = -2$ και $x_2 = \dfrac{6+10}{2} = 8.$

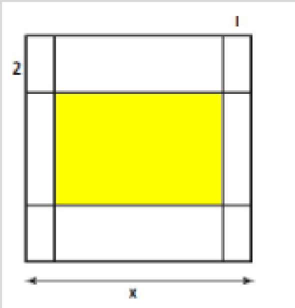
Άρα

x	5		8		10
$x^2 - 6x - 16$		$-$	0	$+$	

Οπότε $x \in [8,10]$.

Άσκηση 10

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση :

$$E(x) = x^2 - 6x + 8$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2. (Μονάδες 7)

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν πολύ 35 cm^2.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Οι πλευρές της περιοχής τύπωσης είναι $x-2$ cm και $x-4$ cm. Οπότε αφού είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο τότε $E(x) = (x-2)(x-4) \Leftrightarrow E(x) = x^2 - 6x + 8$.

β) Είναι $E(x) = 24 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 24 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 6x - 16 = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 36 + 64 = 100$.

$x_1 = \frac{6-10}{2} = -2 < 0$ (απορρίπτεται διότι $5 \leq x \leq 10$) και

$x_2 = \frac{6+10}{2} = 6 > 0$ (δεκτή).

γ) Είναι $E(x) \leq 35 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 35 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2 - 6x - 27 \leq 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) = 36 + 108 = 144$.

$x_1 = \frac{6-12}{2} = -3$ και $x_2 = \frac{6+12}{2} = 9$.

Άρα

x	5		9		10
$x^2 - 6x - 27$		$-$	0	$+$	

Οπότε $x \in [5,9]$.

Άσκηση 11

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες Κελσίου, Φαρενάιτ και Κέλβιν. Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1:Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $\left({}^{0}\mathrm{C}\right)$ σε βαθμούς Φαρενάιτ$\left({}^{0}\mathrm{F}\right)$, πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $\left({}^{0}\mathrm{C}\right)$ σε βαθμούς Κέλβιν $\left({}^{0}\mathrm{K}\right)$ προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου$\left({}^{0}\mathrm{C}\right)$ το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν $\left({}^{0}\mathrm{K}\right)$ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ$\left({}^{0}\mathrm{F}\right)$ είναι η:

$$\mathrm{K}=\frac{\mathrm{F}-32}{1{,}8}+273$$ (Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μίας νύχτας η θερμοκρασία σε μία άλλη πόλη κυμάνθηκε από 278 ${}^{0}\mathrm{K}$ μέχρι 283 ${}^{0}\mathrm{K}$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ${}^{0}\mathrm{F}$.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει από τις παραπάνω προτάσεις Π1 και Π2 ότι:

$$\mathrm{F}=1{,}8\mathrm{C}+32 \;\; (1) \;\; \text{και} \;\; \mathrm{K}=\mathrm{C}+273 \;\; (2)$$

β) Από τη σχέση (2) έχουμε $\mathrm{C}=\mathrm{K}-273$.

Άρα η σχέση (1) γράφεται: $\mathrm{F}=1{,}8(\mathrm{K}-273)+32 \Leftrightarrow \mathrm{F}-32=1{,}8(\mathrm{K}-273) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{F}-32}{1{,}8}=\mathrm{K}-273 \Leftrightarrow \mathrm{K}=\frac{\mathrm{F}-32}{1{,}8}+273.$$

γ) Ισχύει ότι $278\leq \mathrm{K}\leq 283 \Leftrightarrow 278\leq \frac{\mathrm{F}-32}{1{,}8}+273\leq 283 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5\leq \frac{\mathrm{F}-32}{1{,}8}\leq 10 \Leftrightarrow 9\leq \mathrm{F}-32\leq 18 \Leftrightarrow 41\leq \mathrm{F}\leq 50.$$

Άσκηση 12

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μία επιχείρηση που γεμίζει τόνερ για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α.).Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μία σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος **Κ(ν)** της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μία σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα **Ε(ν)** της επιχείρησης, από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση:

i) να μην έχει ζημιά (Μονάδες 7)

ii) να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Το μηνιαίο κόστος **Κ(ν)** της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα είναι $Κ(ν)= 6500 + 15ν$

β) Τα μηνιαία έσοδα **Ε(ν)** της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα είναι

$$Ε(ν)= 25ν$$

γ) i) Για να μην έχει ζημιά η επιχείρηση πρέπει:

$$Ε(ν)\geq Κ(ν) \Leftrightarrow 25ν \geq 6500 + 15ν \Leftrightarrow 10ν \geq 6500 \Leftrightarrow ν \geq 650.$$

Άρα αν η επιχείρηση πουλήσει τουλάχιστον 650 τόνερ δεν έχει ζημιά.

ii) Για να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ η επιχείρηση πρέπει:

$$Ε(ν)-Κ(ν)\geq 500 \Leftrightarrow 25ν - (6500 + 15ν) \geq 500 \Leftrightarrow 10ν \geq 7000 \Leftrightarrow ν \geq 700.$$

Άρα αν η επιχείρηση πουλήσει τουλάχιστον 700 τόνερ για να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

Άσκηση 13

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)= x^2$ και $g(x)= λx + (1 - λ)$, $x \in R$ και λ παράμετρος με $λ\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. (Μονάδες 8)

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό; (Μονάδες 8)

γ) Αν $λ\neq 2$ και x_1, x_2, είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g, να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2$. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2 = λx + (1 - λ) \Leftrightarrow x^2 - λx - (1 - λ) = 0$ (1)

$Δ= (-λ)^2 + 4(1 - λ) = λ^2 - 4λ + 4 = (λ - 2)^2 \geq 0$

Άρα $Δ\geq 0$ για κάθε $λ\in R$ οπότε η σχέση (1) έχει μία τουλάχιστον λύση, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Για να έχουν οι C_f και C_g ένα μόνο κοινό σημείο πρέπει η σχέση (1) έχει μία λύση. Άρα $Δ= 0 \Leftrightarrow (λ - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow λ = 2$.

Για $λ = 2$ η σχέση (1) γράφεται :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Οπότε για $x = 1$ είναι $y= 1$ άρα το σημείο τομής είναι το Α(1,1).

> Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και C_g λύνουμε την εξίσωση $f(x)= g(x)$

γ) Αν $λ\neq 2$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Από τύπους Vieta ισχύει: $x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = λ$.

Άρα $(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2 \Leftrightarrow λ^2 = |λ| + 2 \Leftrightarrow λ^2 - |λ| - 2 = 0 \Leftrightarrow |λ|^2 - |λ| - 2 = 0.$

Θέτω $|λ| = ω \geq 0$

Άρα $ω^2 - ω - 2 = 0$. Δ=1+8=9> 0 . Οπότε:

$$ω_1 = \frac{1-3}{2} = -1 < 0 \text{ (απορρίπτεται) και } ω_2 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ (δεκτή)}$$

Άρα $|λ| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} λ = 2 \text{ (απορρίπτεται)} \\ \text{ή } λ = -2 \text{ (δεκτή)} \end{cases}$

Άσκηση 14

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40$cm. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$ (Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 20x - x^2. \quad \text{(Μονάδες 8)}$$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0,20)$. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Έστω x το μήκος και y το πλάτος του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με $x > 0$ και $y > 0$.

Η περίμετρος του είναι $\Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow \Pi = 2x + 2y \Leftrightarrow 20 = x + y \Leftrightarrow y = 20 - x$.

Όμως $y > 0 \Leftrightarrow 20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20$. Άρα $x \in (0,20)$.

β) Το εμβαδόν Ε(x) του ορθογωνίου είναι:

$$E = x \cdot y \Leftrightarrow E(x) = x(20 - x) \Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2.$$

γ) Είναι $E(x) = 20x - x^2 \Leftrightarrow E(x) = 20x - x^2 - 100 + 100 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow E(x) = -(-20x + x^2 + 100) + 100 \Leftrightarrow E(x) = -(x - 10)^2 + 100 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 10)^2 = 100 - E(x) \geq 0\,.$$

Άρα $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0,20)$.

δ) Από το γ) ερώτημα το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι

$$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow (x - 10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Άρα το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm.

Άσκηση 15

Μία περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μία δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Έτος	2000	2001	2002	2003	2004
Αριθμός ελαφιών	1300	1360	1420	1480	1540

Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:

α) Να βρείτε μία σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτους από το 2000 και μετά. (Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:

i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος του 2012. (Μονάδες 6)

ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%. (Μονάδες 6)

iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600 ελάφια.

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των ελαφιών ανά έτος αυξάνει κατά 60 οπότε είναι $y = 1300 + 60x$ όπου y είναι ο αριθμός των ελαφιών και x ο αριθμός των ετών όπου για $x = 0$ θεωρούμε το έτος 2000, για $x = 1$ θεωρούμε το έτος 2001, για $x =2$ θεωρούμε το έτος 2002 κ.ο.κ.

β) i) Για $x = 12$ είναι $y = 1300 + 60 \cdot 12 = 1300 + 720 = 2020$ ελάφια.

ii) Ο αριθμός των ελαφιών θα αυξηθεί κατά $\frac{60}{100}\cdot 1300=780$ ελάφια, οπότε τα ελάφια συνολικά είναι $1300 + 780 = 2080$ ελάφια.

Άρα για $y = 2080$ έχουμε:

$$2080 = 1300 + 60x \Leftrightarrow 780 = 60x \Leftrightarrow x = 13.$$

Άρα το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60% είναι το 2013.

iii) Είναι $y < 2600 \Leftrightarrow 1300 + 60x < 2600 \Leftrightarrow 60x < 1300 \Leftrightarrow x < 21{,}6$.

Άρα το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δεν θα υπερβεί τα 2600 ελάφια είναι το 2021.

Άσκηση 16

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η συνάρτηση $f(x)= \sqrt{x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)}$ να έχει πεδίο ορισμού το R. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta= (-1)^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0, \lambda \in R$.

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$.

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ίσες πρέπει $\Delta= 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

γ) Για να έχει η συνάρτηση $f(x)= \sqrt{x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)}$ πεδίο ορισμού το R πρέπει:

$$x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in R.$$

Άρα πρέπει ταυτόχρονα $\alpha > 0$ *και* $\Delta \leq 0$.

Είναι $\alpha = 1 > 0$ και $\Delta = (2\lambda - 1)^2 \leq 0$ το οποίο ισχύει για $\lambda = \frac{1}{2}$

Άσκηση 17

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)= x^2 - 2x$ και $g(x)= 3x - 4$, $x \in R$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y = \alpha$, $\alpha < -1$ βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g λύνουμε την εξίσωση:

$f(x)= g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9.$

$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ και $x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

- Για $x_1 = 1$ είναι $y = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ και
- Για $x_2 = 4$ είναι $y = f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα Α(1,−1) και Β(4,8).

β) Πρέπει $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 < 0$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (1,4)$

γ) Πρέπει $f(x) > \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x > \alpha \Leftrightarrow x^2 - 2x - \alpha > 0$ (1)

Είναι $\Delta = 4 + 4\alpha = 4(1 + \alpha) < 0$ αφού $\alpha < -1$.

Άρα

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 2x - \alpha$		$+$	

Οπότε η σχέση (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 18

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

β) i) Να χαράξετε την C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους. (Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

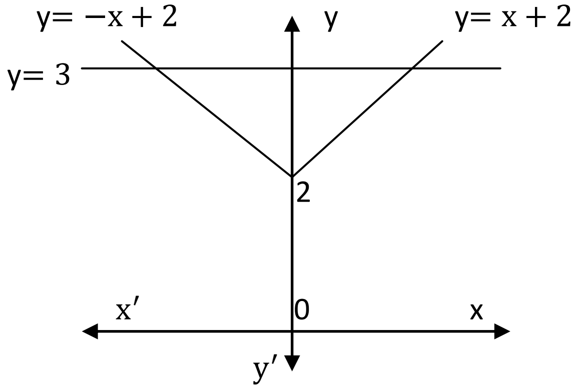
γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Για x= 0 είναι y= f(0)= $0+2=2$. Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$ είναι το Α(0,2).

β) i)



Τα σημεία τομής είναι τα Β(1,3) και $\Gamma(-1,3)$.

ii) Τα παραπάνω σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ γιατί έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη.

γ) i) Αν $\alpha>3$, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει την C_f σε δύο σημεία το οποίο φαίνεται από την παραπάνω γραφική παράσταση της f.

ii) Εύρεση σημείων τομής των C_f και της ευθείας $y=\alpha$.

- Για $x<0$ είναι $f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x+2=\alpha \Leftrightarrow x=2-\alpha$. Άρα $\Gamma(2-\alpha\ ,\alpha)$
- Για $x\geq 0$ είναι $f(x)=\alpha \Leftrightarrow x+2=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha-2$. Άρα $\Delta(\alpha-2\ ,\alpha)$

Άσκηση 19

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= $x^2-4x+\alpha$ και g(x)= $\alpha x-5$, α$\in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει f(2)= g(2), να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 7)

β) Για α= 1

i) Να λύσετε την εξίσωση f(x)= g(x) (Μονάδες 8)

ii) Να λύσετε την ανίσωση f(x)≥g(x) και με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|\,f(x)-\ g(x)|=\ f(x)-\ g(x)$$ (Μονάδες 5+5)

ΛΥΣΗ

α) Είναι f(2)= g(2)$\Leftrightarrow 2^2-4\cdot 2+\alpha=\alpha\cdot 2-5 \Leftrightarrow$ α= 1.

β) i) Για α= 1 έχουμε: f(x)= g(x)$\Leftrightarrow x^2-4x+1=\ x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6=24>0$.

$$x_1=\frac{5-1}{2}=2 \text{ και } x_2=\frac{5+1}{2}=3$$

ii) Είναι f(x)≥g(x)$\Leftrightarrow x^2-4x+1\geq\ x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6\geq 0$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		$-$	0	+	0	$-$	

Άρα x$\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

Αφού f(x)≥g(x)⇔f(x)−g(x)≥ 0. Οπότε έχουμε:

$|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x) = f(x)- g(x)$ που ισχύει για κάθε x$\in (-\infty,2] \cup [3,+\infty)$.

Άσκηση 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x∈A ισχύει $f(x) = |x|-2$ (Μονάδες 9)

γ) Για κάθε x ∈A να λύσετε την εξίσωση: $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $|x|-3 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq 3$ και $x \neq -3$. Άρα A= $R-\{-3,3\}$.

β) Είναι $f(x) = \frac{x^2-5|x|+6}{|x|-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{|x|^2-5|x|+6}{|x|-3} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(|x|-3)(|x|-2)}{|x|-3} \Leftrightarrow f(x) = |x|-2$.

γ) Είναι $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)^2+4f(x)+4-4f(x)-5=0 \Leftrightarrow$

$f(x)^2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$ ή $f(x) = -1$

$f(x) = 1 \Leftrightarrow |x|-2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$ (απορρίπτεται)

$f(x) = -1 \Leftrightarrow |x|-2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$ (δεκτή).

Άσκηση 21

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= $\alpha x-\alpha+2$ και g(x)= $x^2-\alpha+3$, α$\in$ R.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο (1,2) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 4)

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να διέρχεται η γραφική παράσταση της f από το σημείο (1,2) πρέπει

f(1)= $2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1-\alpha+2 = 2 \Leftrightarrow 0 \cdot \alpha = 0$ που ισχύει για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) i) Ισχύει f(1) = g(1)$\Leftrightarrow 2 = 1-\alpha+3 \Leftrightarrow \alpha = 2$

ii) Για $\alpha = 2$ οι συναρτήσεις παίρνουν τη μορφή f(x)= $2x-2+2 \Leftrightarrow$ f(x)= $2x$

και g(x)= $x^2-2+3 \Leftrightarrow$ g(x)= x^2+1

Έχουμε f(x) = g(x)$\Leftrightarrow 2x = x^2+1 \Leftrightarrow x^2+1-2x = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο.

γ) Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις των f και g δύο σημεία τομής πρέπει η εξίσωση

f(x) = g(x) να έχει δύο ρίζες.

f(x) = g(x)$\Leftrightarrow \alpha x - \alpha + 2 = x^2 - \alpha + 3 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + 1 = 0$

Απαιτούμε $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 4 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Άσκηση 22

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= $4x + 2$ και g(x)= $x^2 - 9$, $x \in R$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_g με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3,0) και (−3,0). (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα $x'x$ που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση f(x)= g(x). (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη συνάρτηση h της οποίας η γραφική της παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το Α(0, 3) και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Για $y = 0$ είναι $0 = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -3$.

Άρα τα σημεία τομής της C_g με τον άξονα $x'x$ είναι τα Α(3,0) και Β(−3,0).

β) Θα εξετάσουμε αν τα σημεία (3,0) και (−3,0) επαληθεύουν τον τύπο της f.

f(3)= $0 \Leftrightarrow 4 \cdot 3 + 2 = 0 \Leftrightarrow 14 = 0$ (αδύνατο)

f(−3)= $0 \Leftrightarrow 4 \cdot (-3) + 2 = 0 \Leftrightarrow -10 = 0$ (αδύνατο)

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία (3,0) και (−3,0).

γ) Από το (α) ερώτημα η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα Α(3,0) και Β(−3,0) από τα οποία όμως από το (β) ερώτημα δεν περνάει η C_f. Άρα δεν υπάρχει σημείο του άξονα $x'x$ που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση f(x)= g(x).

δ) Αφού η γραφική παράσταση της h είναι ευθεία, ψάχνουμε εξίσωση της μορφής:

$$h(x) = \alpha \cdot x + \beta, \ \alpha, \beta \in R .$$

Αφού διέρχεται από το σημείο Α(0, 3) θα ισχύει η σχέση:

$h(0) = 3 \Rightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 3$ και αφού τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του ημιάξονα Ox αυτό θα είναι το σημείο (3, 0).

Επομένως θα πρέπει να ισχύει:

$$h(3) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 3 + 3 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = -1$$

Άρα η συνάρτηση που ψάχναμε είναι η $h(x) = -x + 3$

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $9-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<9 \Leftrightarrow -3<x<3$. Άρα $x\in(-3,3)$

β) Για $x=0$ είναι $f(0)=\frac{0+2}{\sqrt{9-0^2}}=\frac{2}{3}$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξοναy′y στο σημείο $A(0,\frac{2}{3})$.

Για $y=0$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξοναx′x στο σημείο $B(-2,0)$.

γ) Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

Το $A(0,\frac{2}{3})$ επαληθεύει την ευθεία οπότε: $\frac{2}{3}=\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{2}{3}$

Το $B(-2,0)$ επαληθεύει την ευθεία οπότε: $0=2\alpha+\beta \Leftrightarrow 0=2\alpha+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{3}$

Οπότε η εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β είναι $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

Άσκηση 24

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in R$.

α) να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Έστω Μ (x, y) σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για $y=0$ είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ (1)

Είναι $\Delta=1-4=-3<0$ άρα η παραπάνω εξίσωση δεν έχει λύσεις οπότε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β) Πρέπει $f(x)<y \Leftrightarrow x^2+x+1<2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2<0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \text{ και } x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1,2)$

γ) Είναι $|2x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$.

Οπότε από το (β) ερώτημα το σημείο αυτό Μ (x,y) σημείο της C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

Άσκηση 25

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0{,}43x - 26$

Άνδρας: $y = 0{,}45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας. (Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άνδρα ύψους περίπου 164cm.Λίγα μέτρα πιο κάτω ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8cm που ανήκει σε άνδρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά του χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μία γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $38{,}5 = 0{,}43x - 26 \Leftrightarrow 64{,}5 = 0{,}43x \Leftrightarrow x = 150\text{cm}$.

Οπότε το ύψος της γυναίκας είναι 150cm.

β) Εφόσον ο άνδρας έχει ύψος περίπου 164cm τότε το μηριαίο οστό του θα ισούται με: $y = 0{,}45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow: y = 42{,}8$ cm.Άρα είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά του χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ) Για να έχουν το ίδιο μηριαίο οστό θα πρέπει

$$0{,}43x - 26 = 0{,}45x - 31 \Leftrightarrow 5 = 0{,}02x \Leftrightarrow x = 250 \text{ cm}.$$

Δηλαδή για να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους πρέπει ο άνδρας και η γυναίκα να έχουν ύψος 250 cm το οποίο είναι αδύνατο για τα παλιά χρόνια.

Άσκηση 26

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στο λαγό και στη χελώνα γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από το σημείο Ο.
- Το τέρμα βρίσκεται σε ένα σημείο Μ με ΟΜ$>$ 600 μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t = 0$ προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο Α που βρίσκεται μεταξύ του Ο και του Μ με ΟΑ=600 μέτρα.

Υποθέτουμε ότι για $t \geq 0$, η απόσταση του λαγού από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_Λ(t) = 10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το Ο τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t) = 600 + 40t$ μέτρα.

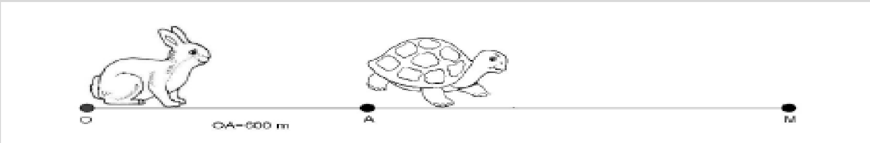
α) Να βρείτε σε πόση απόσταση από το Ο θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα Μ, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα. (Μονάδες 10)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος Μ από το Ο είναι ΟΜ=2250 μέτρα. Να βρείτε:

i) Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα. (Μονάδες 5)

ii) Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t = 12$ min και ποια είναι η μεταξύ τους απόσταση. (Μονάδες 5)

iii) Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα. (Μονάδες 5)



ΛΥΣΗ

α) Για να κερδίσει τον αγώνα η χελώνα πρέπει

$$S_X(t) > S_Λ(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0$$

$Δ= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 256 > 0$

$t_1 = \frac{4-16}{2} = -6 < 0$ (απορρίπτεται) και $t_2 = \frac{4+16}{2} = 10$

t	0		10		$+\infty$
$t^2 - 4t - 60$		$-$	0	$+$	

Άρα αν $t \leq 10$ η χελώνα θα κερδίσει τον αγώνα.

Για $t= 10$ θα τερματίσουν ταυτόχρονα και η χελώνα και ο λαγός.

Για $t= 10$ min το σημείο τερματισμού Μ θα απέχει από το Ο $S_Λ(10) = 10 \cdot 10^2 = 1000$ μέτρα.

β) i) Είναι $S_X(t) = S_Λ(t) \Leftrightarrow 600 + 40t > 10t^2 \Leftrightarrow 10t^2 - 40t - 600 < 0$

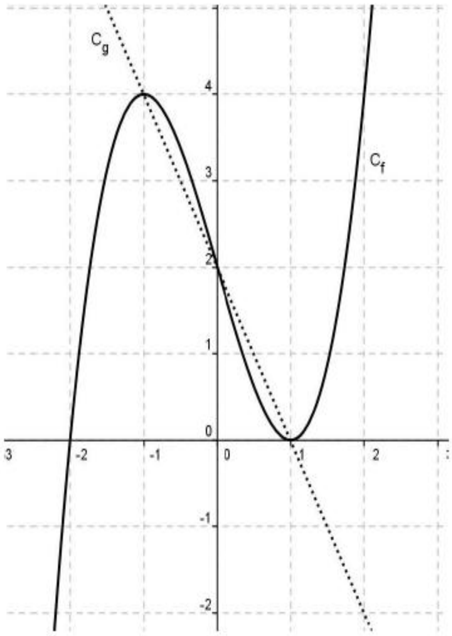
$\Leftrightarrow t^2 - 4t - 60 < 0 \Leftrightarrow t= 10$ min

ii) Τη χρονική στιγμή $t = 12$ min$>$ 10 min προηγείται ο λαγός.

Ο λαγός έχει διανύσει απόσταση $S_Λ(12) = 10 \cdot 12^2 = 1440$ μέτρα και η χελώνα έχει διανύσει απόσταση $S_X(12) = 600 + 40 \cdot 12 = 1080$ μέτρα, οπότε η μεταξύ τους απόσταση είναι 1440−1080=360 μέτρα.

iii) Είναι $S_{\Lambda}(\mathrm{t}) = 2250 \Leftrightarrow 10\mathrm{t}^2 = 2250 \Leftrightarrow \mathrm{t}^2 = 225 \Leftrightarrow$ t= 15 min

Άσκηση 27



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και της συνάρτησης

g(x)$= -2\mathrm{x} + 2$, x$\in$ R.

Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει f(x)$= -2\mathrm{x} + 2$

(Μονάδες 6)

β) Τις τιμές f(-1), f(0), f(1) (Μονάδες 6)

γ) Τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

δ) Τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση

$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{f(x)} + 2\mathrm{x} - 2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Με τη βοήθεια του σχήματος οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει f(x)$= -2\mathrm{x} + 2$ είναι οι: $\mathrm{x} = -1,\ \mathrm{x} = 0,\ \mathrm{x} = 1$

β) Είναι f(-1)$= -2(-1) + 2 = 4$, f(0)$= -2 \cdot 0 + 2 = 2$ και f(1)$= -2 \cdot 1 + 2 = 0$

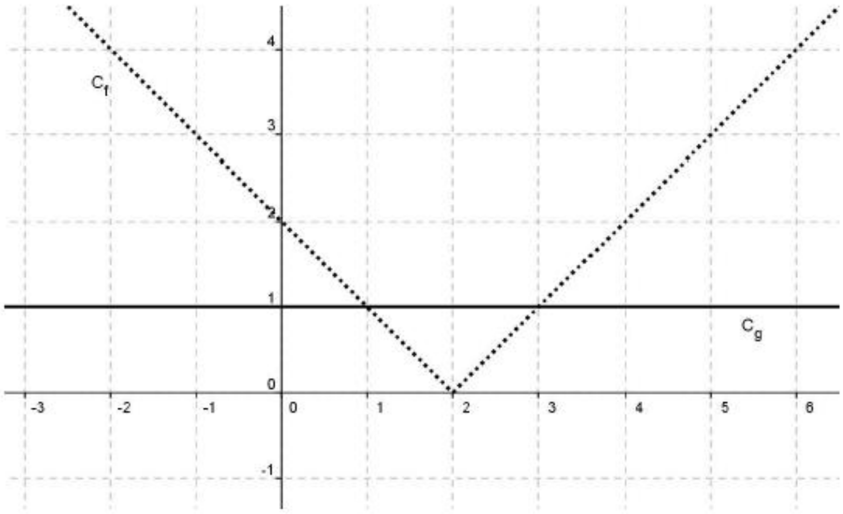
γ) Οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g με τη βοήθεια του σχήματος είναι:x$\in (-1{,}0) \cup (1, +\infty)$.

δ) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση $\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{f(x)} + 2\mathrm{x} - 2}$ πρέπει $\mathrm{f(x)} + 2\mathrm{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} \geq -2\mathrm{x} + 2 \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} \geq$ g(x)$\Leftrightarrow$ x$\in [-1{,}0] \cup [1, +\infty)$.

Άσκηση 28

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=1,\ x\in \mathbb{R}.$$



α) i) Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii) Να εκτιμήσετε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

(Μονάδες 10)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A=\frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) i) Τα σημεία τομής των C_f και C_g είναι τα Α(1,1) και Β(3,1).

ii) Οι τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος είναι: $x\in(1,3)$.

β) Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και C_g πρέπει

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \Leftrightarrow x=3 \\ \text{ή} \\ x-2=-1 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

Άρα για $x=3$ είναι $y=1$ και για $x=1$ είναι $y=1$.

Επίσης είναι $f(x)<g(x) \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow -1<x-2<1 \Leftrightarrow 1<x<3$.

γ) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παραπάνω παράσταση πρέπει ταυτόχρονα:

$$1-f(x)\geq 0 \text{ και } f(x)\neq 0.$$

Οπότε $1-f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\leq 1 \Leftrightarrow |x-2|<1 \Leftrightarrow 1<x<3$ (1) και

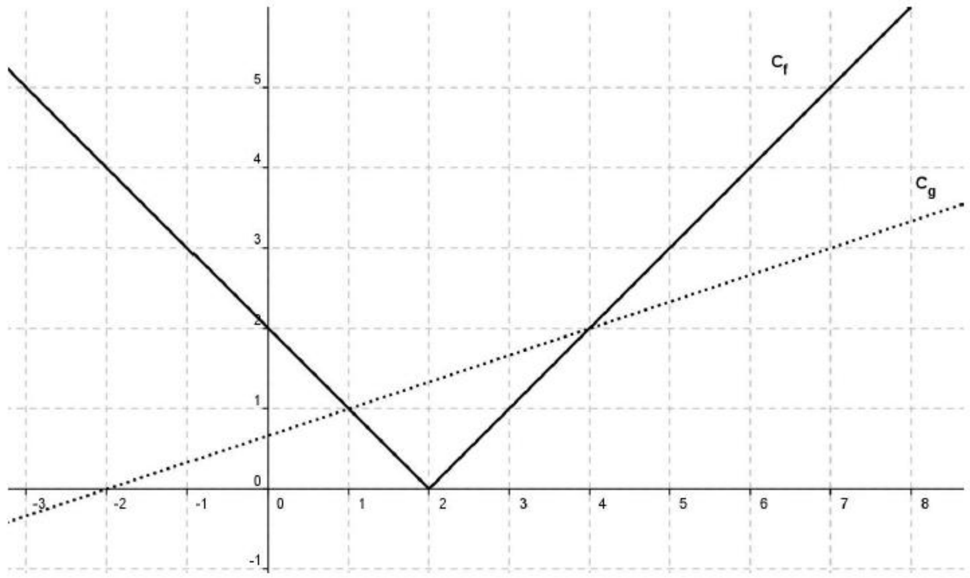
$f(x)\neq 0 \Leftrightarrow |x-2|\neq 0 \Leftrightarrow x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι x∈ $(1,2) \cup (2,3)$.

Άσκηση 29

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με

$$f(x)=|x-2| \text{ και } g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \quad x\in \mathbb{R}.$$



α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g. (Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα. (Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι πάνω από τη C_g. (Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ) να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$ (Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος είναι τα σημεία A(1,1) και B(4,2).

β) Για να βρούμε αλγεβρικά τα σημεία τομής των C_f και C_g πρέπει

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow |x-2|=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\begin{cases} x-2=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x-6=x+2 \Leftrightarrow x=4 \\ \text{ή} \\ x-2=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x-6=-x-2 \Leftrightarrow x=1 \end{cases}$$

Για $x=4$ είναι $y=f(4)=|4-2|=2$, το σημείο B(4,2).

Για $x=1$ είναι $y=f(1)=|1-2|=1$, το σημείο A(1,1).

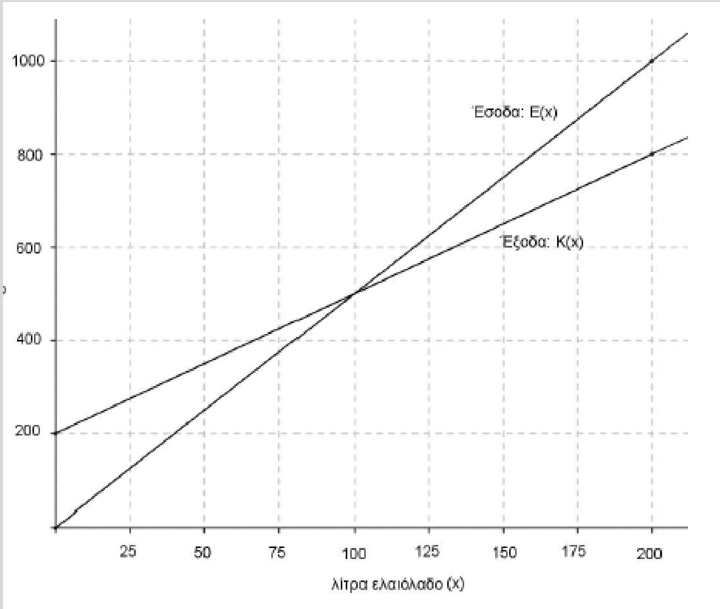
γ) Οι τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι πάνω από τη C_g με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων είναι x∈ $(-\infty,1) \cup (4,+\infty)$.

δ)) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παραπάνω παράσταση πρέπει:

$3|2-x|-(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow 3|2-x|\geq x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |2-x|\geq \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow f(x)\geq g(x) \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[4,+\infty).$$

Άσκηση 30



Μία μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα K(x) και τα έσοδα E(x) από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους. (Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας; (Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων K(x) και E(x) και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ). (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι (100, 500). Αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Όταν η εταιρεία πουλήσει 100 λίτρα βιολογικού ελαιόλαδου τότε τα έσοδα και τα έξοδα της εταιρείας είναι τα ίδια, δηλαδή 550 ευρώ. Στην περίπτωση αυτή η εταιρεία δεν έχει κέρδος άλλα δεν έχει ούτε και χάσιμο.

β) Τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας είναι (για x= 0) K(0)= 200 ευρώ.

γ) Για να μην έχει ζημιά η εταιρεία πρέπει να πουλήσει τουλάχιστον 100 λίτρα βιολογικού ελαιόλαδου.

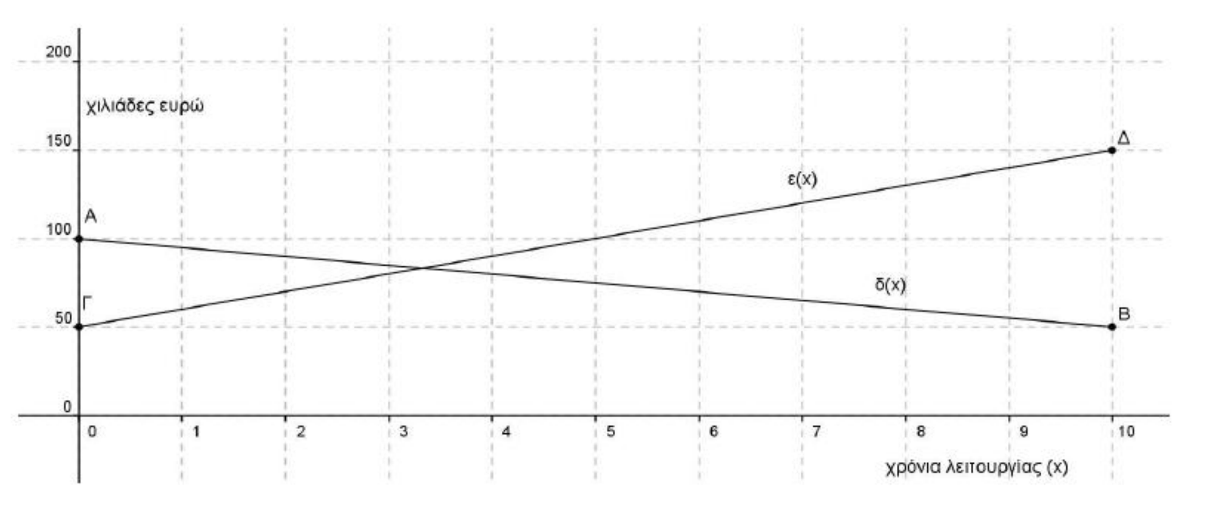
δ) Παρατηρούμε ότι από το παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των εσόδων και εξόδων είναι ευθείες. Έστω y= $\alpha x+\beta$ η εξίσωση ευθείας των εσόδων.

Το σημείο Ο(0,0) την επαληθεύει, άρα 0= $\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=0$

Το σημείο Α(100,500) την επαληθεύει, άρα 500$= \alpha \cdot 100 + 0 \Leftrightarrow \alpha = 5$.
Άρα η εξίσωση ευθείας των εσόδων είναι y$= 5\mathrm{x}$ (1)
Έστω y$= \gamma\mathrm{x} + \delta$ η εξίσωση ευθείας των εξόδων.
Το σημείο Γ(0,200) την επαληθεύει, άρα 200$= \gamma \cdot 0 + \delta \Leftrightarrow \delta = 200$
Το σημείο Α(100,500) την επαληθεύει, άρα 500$= \gamma \cdot 100 + 200 \Leftrightarrow \gamma = 3$.
Άρα η εξίσωση ευθείας των εξόδων είναι y$= 3\mathrm{x} + 200$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) πρέπει για να μην έχει ζημιά η εταιρεία:
$5\mathrm{x} \geq 3\mathrm{x} + 200 \Leftrightarrow 2\mathrm{x} \geq 200 \Leftrightarrow \mathrm{x} \geq 100$.

Άσκηση 31

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0,100) και Β(10,50) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μίας εταιρείας σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια λειτουργίας της.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0,50) και Δ(10,150) παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας. (Μονάδες 4)
β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές. (Μονάδες 15)
ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από το παραπάνω σύστημα συντεταγμένων τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας είναι ε(5)$= 100$ χιλιάδες ευρώ και δ(5)$= 75$ χιλιάδες ευρώ
β) i) Παρατηρούμε ότι από το παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των εσόδων και εξόδων είναι ευθείες.

Έστω y= $\alpha x+\beta$ η εξίσωση ευθείας των εσόδων ε(x) .

Το σημείο Γ(0,50) την επαληθεύει, άρα 50= $\alpha\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=50$

Το σημείο Δ(10,150) την επαληθεύει, άρα 150= $\alpha\cdot 10+50 \Leftrightarrow \alpha=10.$

Άρα η εξίσωση ευθείας των εσόδων ε(x) είναι y= $10x+50$ (1)

Έστω y= $\gamma x+\delta$ η εξίσωση ευθείας των εξόδων δ(x).

Το σημείο Α(0,100) την επαληθεύει, άρα 100= $\gamma\cdot 0+\delta \Leftrightarrow \delta=100$

Το σημείο Β(10,50) την επαληθεύει, άρα $50=\gamma\cdot 10+100 \Leftrightarrow \gamma=-5.$

Άρα η εξίσωση ευθείας των εξόδων είναι y= $-5x+100$ (2)

Οπότε για x= 5 η σχέση (1) δίνει ε(5)= $y=10\cdot 5+50=100$

και για x= 5 η σχέση (2) δίνει δ(5)= $y=-5\cdot 5+50=75$

ii) Εξισώνοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$10x+50=-5x+100 \Leftrightarrow 15x=50 \Leftrightarrow x=\frac{50}{15}$$

Για $x=\frac{50}{15}$ έχουμε από την σχέση (1) y= $10\cdot\frac{50}{15}+50 \Leftrightarrow$ y= $\frac{1250}{15}$ =83,33

Δηλαδή μετά από $\frac{50}{15}=3{,}33$ χρόνια τα έσοδα και τα έξοδα της εταιρείας θα είναι τα ίδια.