ΠΕΡΙΚΛΗΣ Γ. ΚΑΤΣΙΜΑΓΚΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΘΕΜΑ

- ✓ *Ορισμοί – Αποδείξεις*
- ✓ *Ερωτήσεις τύπου Σωστό – Λάθος*
- ✓ *Θέματα Εξετάσεων*
- ✓ *Ισχυρισμοί με αιτιολόγηση*
- ✓ *Απαντήσεις ερωτήσεων σχολ. Βιβλίου*
- ✓ *Τυπολόγια*

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ

ΠΕΡΙΚΛΗΣ Γ. ΚΑΤΣΙΜΑΓΚΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΘΕΜΑ

- ✓ **Ορισμοί - Αποδείξεις**
- ✓ **Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος**
- ✓ **Θέματα Εξετάσεων**
- ✓ **Ισχυρισμοί με αιτιολόγηση**
- ✓ **Απαντήσεις ερωτήσεων σχολ. βιβλίου**
- ✓ **Τυπολόγια**

ΕΚΔΟΣΕΙΣ: Ι. ΚΑΛΙΜΑΝΗΣ – Π. ΚΑΤΣΙΜΑΓΚΛΗΣ & ΣΙΑ Ε.Ε.
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ

Κεντρική Διάθεση
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ
Τραυλαντώνη 18, 15771 Ζωγράφου
Τηλ.: 210 7470344 – 210 7470395
www.orosimo.eu , e-mail: info@orosimo.eu

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΣΕΛΙΔΟΠΟΙΗΣΗ - ΣΧΗΜΑΤΑ: Δ. ΖΑΧΑΡΙΑ – Λ. ΝΤΕΛΟΥ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ: ΛΙΑΝΑ ΝΤΕΛΟΥ
ΕΚΤΥΠΩΣΗ – ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: ΦΩΤΟΓΙΟΥΝΙΚΑ ΜΟΝΟΠΡΟΣΩΠΗ Ε.Π.Ε.
ISBN: 978-618-80731-4-2

Πρόλογος

Το 1ο Κεφάλαιο αυτού του βιβλίου περιλαμβάνει τους ορισμούς και τις αποδείξεις των θεωρημάτων των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου, σύμφωνα με την ύλη των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Το 2ο Κεφάλαιο περιέχει ερωτήσεις τύπου «Σωστό – Λάθος» ανά κεφάλαιο της ύλης σύμφωνα με το πνεύμα των ερωτήσεων των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Όμως, σε <u>καμία περίπτωση</u> δεν υποκαθιστά το σχολικό βιβλίο από το οποίο ο μαθητής οφείλει να γνωρίζει όλα τα θεωρήματα, τις εφαρμογές, τις παρατηρήσεις και τα σχόλια που <u>είναι στην ύλη</u> των Πανελλαδικών Εξετάσεων και δεν περιλαμβάνονται στο παρόν βιβλίο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΟΡΙΣΜΟΙ – ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ -ΛΑΘΟΣ»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}: ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ -ΛΑΘΟΣ» ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000 - 2017

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o}: ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}: ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΟΡΙΣΜΟΙ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. ***Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και τι τιμή της f στο $x \in A$;*** ***Πανελλαδικές 2019***

Έστω Α ένα υποσύνολο του $\Re$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

2. ***Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μίας συνάρτησης $f: A \to \Re$;***

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \ \text{ για κάποιο } \ x \in A\}.$$

3. ***Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f: $A \to \Re$;***

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x,f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

4. ***Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;***

Πανελλαδικές 2007, 2016

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

5. *Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\frac{f}{g}$.*

Ορίζουμε ως άθροισμα f + g, διαφορά f - g, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x\in A$ και $x\in B$, με $g(x)\neq 0\}$.

6. *Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις να ορίσετε τη σύνθεση gof της f με τη g.*

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με gof, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x)=g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το f(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}$.

7. *Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;*

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$

*Ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή: $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

8. ***Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;***

Μια συνάρτηση f λέγεται: γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

*Ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή: $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

9. ***Πότε μία συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;***

Μια συνάρτηση f λέγεται αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \le f(x_2)$.

10. ***Πότε μία συνάρτηση f λέγεται φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;***

Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) \ge f(x_2)$.

11. ***Πότε μία συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;***

Πανελλαδικές 2014

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

12. ***Πότε μία συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;***

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

13. ***Τι είναι τα ολικά ακρότατα μίας συνάρτησης f;***

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται (ολικά) ακρότατα της f.

14. ***Πότε μία συνάρτηση λέγεται 1 – 1;***

Μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ λέγεται συνάρτηση 1–1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

15. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=αx+β, με α≠0 είναι συνάρτηση 1–1.***

Αν υποθέσουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x_1+\beta=\alpha x_2+\beta \Rightarrow \alpha x_1=\alpha x_2 \Rightarrow x_1=x_2$$

16. ***Πώς ορίζεται η αντίστροφη μίας συνάρτησης f;***

Πανελλαδικές 2019

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ που είναι 1 – 1. Τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A), της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x)=y$ και επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \to \Re$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$. Η g λέγεται αντίστροφη συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

17. ***Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.***

Έστω οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Επειδή:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x,$$

αν ένα σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο Μ΄(β, α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

1.2 ΟΡΙΟ -ΣΥΝΕΧΕΙΑ

18. ***Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο***

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0 \quad \textbf{και} \quad x_0\in\Re,$$

ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

Έστω το πολυώνυμο: $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και $x_0\in\Re$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0)$$

$$=\lim_{x\to x_0}(\alpha_\nu x^\nu)+\lim_{x\to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}\alpha_0$$

$$=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\cdots+\alpha_0=P(x_0).$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

19. ***Να αποδείξετε ότι για κάθε ρητή συνάρτηση*** $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ***και κάθε***

$x_0\in\Re$ ***με*** $Q(x_0)\neq 0$ ***ισχύει*** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x

και $x_0\in\Re$ με $Q(x_0)\neq 0$. Τότε, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0)\neq 0$.

20. ***Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.***

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

21. ***Πότε λέμε ότι η ακολουθία (a_ν) έχει όριο το $\ell \in \Re$***

Λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \Re$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε ε>0, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

22. ***Πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;***

Πανελλαδικές 2015

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

23. ***Πότε μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;***

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

24. ***Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);***

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β).

25. ***Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];***

Πανελλαδικές 2008, 2012, 2017

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

26. ***Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.***

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

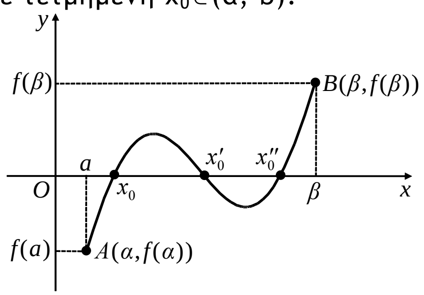
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία:

Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.



27. *Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.*

Πανελλαδικές 2005, 2015

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

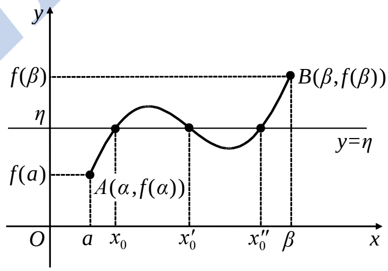
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Αν υποθέσουμε ότι $f(\alpha)>f(\beta)$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

28. ***Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.***

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m. Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \le f(x) \le M, \quad \text{για κάθε} \quad x \in [\alpha,\beta].$$

29. ***Ποιο είναι το σύνολο τιμών μίας γνησίως αύξουσας (αντιστοίχως φθίνουσας) και συνεχούς συνάρτησης ορισμένης σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β);***

Το διάστημα (Α, Β) (αντιστοίχως (Β, Α)), όπου

$$A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x\to\beta^-} f(x).$$

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

30. ***Πώς ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α;***

Πανελλαδικές 2000

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$.

31. ***Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;***

Πανελλαδικές 2004, 2009

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

32. ***Τι ονομάζεται κλίση της C_f στο σημείο*** $A(x_0, f(x_0))$ ***ή κλίση της f στο x_0;***

Ονομάζεται η κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$.

33. ***Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.***

Πανελλαδικές 2000, 2003, 2018

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x - x_0)$,

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = \lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$

$= \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)$

(αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0)

$= f'(x_0)\cdot 0 = 0$,

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

34. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=|x|$ ***αν και συνεχής στο x_0=0, δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.***

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1, \text{ ενώ } \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1.$$

35. ***Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι παραγωγίσιμη στο A;***

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

36. ***Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της.***

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

37. ***Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της.***

Πανελλαδικές 2013

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Θα λέμε ότι:

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\Re \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f((\beta)}{x-\beta}\in\Re$$

38. ***Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού Α;***

Έστω A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f':A_1\to\Re,\quad x\to f'(x)$$

η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f

39. ***Να αποδείξετε ότι η σταθερή συνάρτηση*** $f(x)=c$, ***c***$\in\Re$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re$ ***και ισχύει*** $f'(x)=0$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

40. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=x$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re$ ***και ισχύει*** $f'(x)=1$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1.$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

41. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=x^{\nu}$ ***, ν∈ Ν - {0,1} είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re$ ***και ισχύει*** $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\Re$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-x_0^{\nu}}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=$$

$$x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}$$

Οπότε ,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=$$

,

$$x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$$

δηλαδή $(x^{\nu})'=\nu x^{\nu-1}$.

42. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=\sqrt{x}$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $(0,+\infty)$ ***και ισχύει*** $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ***. Ακόμη, να αποδείξετε ότι αν και συνεχής στο 0 δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.***

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}$$

Οπότε $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Τέλος, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$,

και επομένως η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται στο x_0=0.

43. ****Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση** $f(x)=\eta\mu x$ **είναι παραγωγίσιμη στο** $\Re$ **και ισχύει** $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.*

Πανελλήνιες 2002

Για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}$$

$$=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$, έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή, $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

*Η απόδειξη εκτός ύλης Πανελλαδικών 2018

44. ****Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση** $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ **είναι παραγωγίσιμη στο** $\Re$ **και ισχύει** $f'(x)=-\eta\mu x$.*

Για κάθε $x\in\Re$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

Οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim\limits_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)$

$$=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

*Η απόδειξη εκτός ύλης Πανελλαδικών 2018

45. ***Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις*** f, g ***είναι παραγωγίσιμες στο*** x_0, ***τότε η συνάρτηση*** $f+g$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** x_0 ***και ισχύει:*** $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

46. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re^*$ ***και ισχύει*** $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$.

Για κάθε $x \in \Re^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$.

47. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x) = \varepsilon\varphi x$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re_1 = \Re - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ***και ισχύει*** $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Για κάθε $x \in \Re_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\,\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

48. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=x^{\alpha}$, ***α*** $\in \Re - Z$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $(0,+\infty)$ ***και ισχύει*** $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha \ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha \ln x}\cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot \frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

49. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=\alpha^{x}$, $\alpha>0$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re$ ***και ισχύει*** $f'(x)=\alpha^{x}\ln \alpha$.

Αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln \alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln \alpha$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$y'=(e^{u})'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln \alpha}\cdot \ln \alpha=\alpha^{x}\ln \alpha$.

50. ***Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση*** $f(x)=\ln|x|$, $x\in\Re^{*}$ ***είναι παραγωγίσιμη στο*** $\Re^{*}$ ***και ισχύει*** $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Πανελλαδικές 2008

Πράγματι.

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$,

οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

51. ***Τι ονομάζεται ρυθμός μεταβολής του y=f(x) ως προς x;***

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

52. ***Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.***

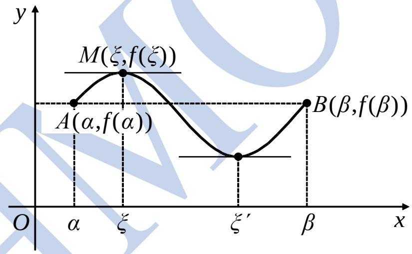
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



53. ***Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.***

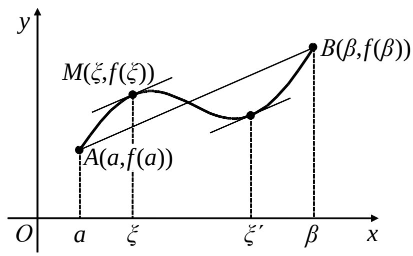
Πανελλαδικές 2003, 2013, 2016

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας *AB*, όπου $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

54. ***Να αποδείξετε ότι αν η f είναι μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και***

- **η *f* είναι συνεχής στο *Δ* και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε *ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο x του *Δ*,**

τότε η *f* είναι σταθερή σε όλο το διάστημα *Δ*.

Πανελλαδικές 2009, 2014

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

55. ***Να αποδείξετε ότι αν δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ και***

- ***οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και***
- ***$f'(x)=g'(x)$ για κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ,***

τότε υπάρχει σταθερά $c \in \Re$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ.

Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \Re$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

56. ***Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι σ υ ν ε χ ή ς σε ένα διάστημα Δ.***

- ***Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.***
- ***Αν $f'(x)<0$ σε κάθε ε σ ω τ ε ρ ι κ ό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.***

Πανελλαδικές 2006, 2012, 2017, 2019

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,

οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

57. ***Τι λέγεται τοπικό μέγιστο μίας συνάρτησης f;***

Πανελλαδικές 2012

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x)\le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

58. ***Τι λέγεται τοπικό ελάχιστο μίας συνάρτησης f;***

Πανελλαδικές 2015

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε:

$$f(x)\ge f(x_0), \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \cap (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

59. ***Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.***

Πανελλαδικές 2004, 2011

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

Πανελλαδικές 2019

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ (2)

— αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$,

οπότε θα έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. (3)

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

60. ***Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία μίας συνάρτησης f;***

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

61. ***Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.***

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Πανελλαδικές 2016

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in[x_0,\beta).$$

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ \ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

62. ***Πότε μία συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ;***
Πανελλαδικές 2006

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

63. ***Πότε μία συνάρτηση f λέγεται κοίλη σε ένα διάστημα Δ;***
Πανελλαδικές 2010, 2014

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

64. ***Πότε το σημείο*** $A(x_0, f(x_0))$ ***ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;***

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 .
Αν ισχύουν:

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

65. ***Πότε η ευθεία x=x₀ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;***
Πανελλαδικές 2010

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

66. ***Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο*** $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Πανελλαδικές 2007

Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία ψ=$\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ (αντιστοίχως στο -∞)

67. ***Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ (αντιστοίχως στο -∞);***

Πανελλαδικές 2005, 2011

Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$), τότε η ευθεία ψ=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞ (αντιστοίχως στο -∞)

68. ***Αν η ευθεία y=λx + β είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞, αντιστοίχως στο -∞, ποιες σχέσεις μας δίνουν τα λ, β;***

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re \text{ και } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re,$$

αντιστοίχως $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\Re \text{ και } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\Re.$$

69. ***Να διατυπώσετε τους κανόνες του de l' Hospital.***

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$ και

υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$ και

υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

1.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

70. ***Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται παράγουσα της f στο Δ;***

Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

71. ***Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:***

- ***όλες οι συναρτήσεις της μορφής*** $G(x) = F(x) + c$, $c \in \Re$, ***είναι παράγουσες της f στο Δ και***
- ***κάθε άλλη παράγουσα*** G ***της f στο Δ παίρνει τη μορφή*** $G(x) = F(x) + c$, $c \in \Re$.

Πανελλαδικές 2010

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \Re$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε:

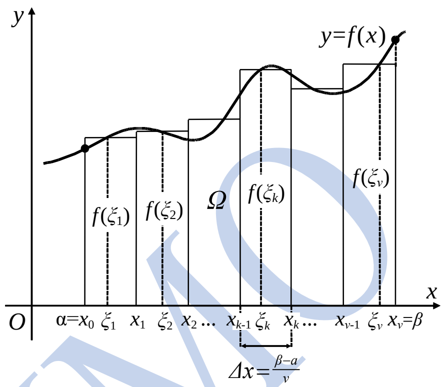
$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \Re$ τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

72. ***Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] με f(x)≥ 0, x∈ [α, β], τι ονομάζεται εμβαδό του επιπέδου χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον x΄x και τις ευθείες x=α, x=β;***

• Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.



• Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι: $S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$.

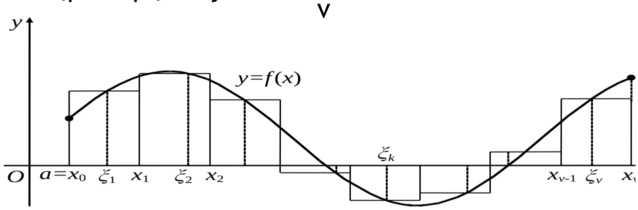
• Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\Re$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

73. ***Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β;***

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$$

Αποδεικνύεται ότι:

“Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\Re$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

74. ***Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα*** $[\alpha, \beta]$. ***Αν G είναι μια παράγουσα της f στο*** $[\alpha, \beta]$, ***τότε να αποδείξετε ότι:***

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Πανελλαδικές 2002, 2013

Η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \Re$ τέτοιο, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

75. ***Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα.***

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx ,$$

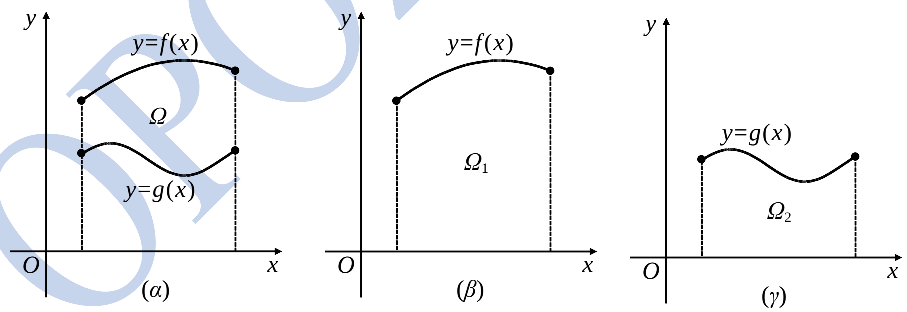
όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[α, β]$.

76. ***Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα.***

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du ,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(α)$, $u_2 = g(β)$.

77. ***Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[α,β]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [α,β]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = α$ και $x = β$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε(Ω) του Ω ισχύει:*** $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$.



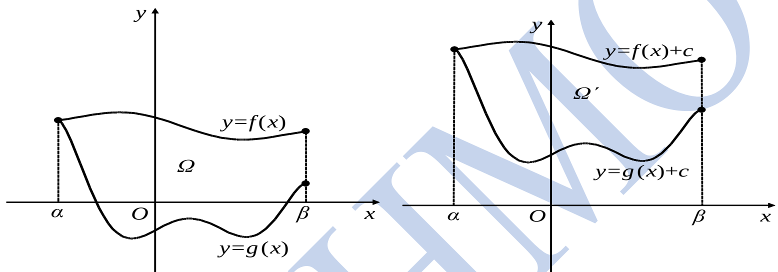
Παρατηρούμε ότι:

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx \quad (1)$$

Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$

78. ***Έστω δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε(Ω) του Ω ισχύει: $E\left(\Omega\right) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x))dx$.***

Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α, β], θα υπάρχει αριθμός $c \in \Re$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (σχ. α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω΄ (σχ. β).



(α) (β)

Επομένως, έχουμε:

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta}[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx\ .$$

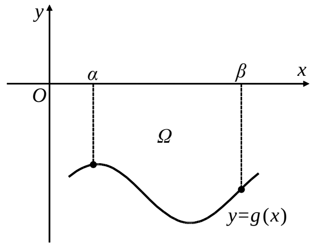
Άρα, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$

79. ***Έστω συνάρτηση g συνεχής στο [α, β] με $g(x) \leq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από Cg, x΄x, x=α, x=β. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν Ε(Ω) του Ω ισχύει $E\left(\Omega\right) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$***

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}[-g(x)]dx = -\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx\ .$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε :

$$E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{o}

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ»

2.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

1. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f το πολύ ένα κοινό σημείο.
2. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και -f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.
3. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.
4. Αν $f(x)\cdot g(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$, τότε $f(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$ ή $g(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$
5. Αν A και B τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, τότε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f+g, f - g και f·g είναι το $A\cup B$
6. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδία ορισμού A και B αντιστοίχως τότε η fog έχει πεδίο ορισμού το $\{x\in A / g(x)\in B\}$
7. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.
8. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\Re$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες
9. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog\neq gof$
10. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$.

11. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

12. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$

13. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η C_f τέμνει τον άξονα x΄x σ' ένα σημείο.

14. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

15. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

16. Μία συνάρτηση $f: A \to \Re$ είναι συνάρτηση 1 - 1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$

17. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ είναι συνάρτηση 1-1, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

18. Μία συνάρτηση $f: A \to \Re$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

19. Μία συνάρτηση $f: A \to \Re$ είναι συνάρτηση 1 – 1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει τουλάχιστον μια λύση ως προς x.

20. Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx΄) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

21. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της τότε είναι και 1 – 1.

22. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1 – 1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες στο πεδίο ορισμού τους.

23. Αν μια συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν είναι 1 – 1.

24. Κάθε συνάρτηση που είναι 1 – 1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

25. Αν μια συνάρτηση είναι 1 – 1, τότε η γραφική της παράσταση C_f τέμνει τον άξονα x΄x σ' ένα το πολύ σημείο.

26. Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε δεν είναι 1 – 1.

27. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε είναι 1 – 1.

28. Αν μία συνάρτηση $f:A \to \Re$ είναι συνάρτηση 1 – 1, τότε ισχύουν:

$f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f\left(f^{-1}(\psi)\right) = \psi$, $\psi \in f(A)$

29. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄

30. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, βρίσκονται πάνω στην ευθεία ψ=x.

2.2 ΟΡΙΟ -ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

1. Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)= \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\ell$

3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-\ell)=0$

4. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ΄ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

5. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο $x_0 \in \Re$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

6. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο $x_0 \in \Re$ και είναι f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$

7. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)< \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

8. Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 και είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$

9. Ισχύει πάντα: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))= \lim\limits_{x\to x_0} f(x)+ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

10. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

11. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\ell_1\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell_2\in\Re$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell_1-\ell_2$

12. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και είναι πραγματικός αριθμός, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}(k f(x))=k\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))$, για κάθε σταθερά $k\in\Re$

13. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f\cdot g$ στο $x_0\in\Re$, τότε θα υπάρχουν και τα όρια των συναρτήσεων f και g στο σημείο $x_0\in\Re$

14. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

15. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και είναι πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.

16. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, με $k\in\mathbb{N}$ και $k\geq 2$

17. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\Re$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{\nu}=\ell^{\nu}$, $\ell\in\mathbb{N}^*$

18. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

19. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\Re$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$

20. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\ell\in\Re^*$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\ell$

21. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell\in\Re$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

22. Για κάθε $x \in \Re^*$, ισχύει: $|\eta\mu x| < |x|$

23. Ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

24. Ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

25. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0

26. Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

27. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$

28. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

29. Αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, τότε το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει

30. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

31. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$

32. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

33. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$

34. Ισχύει: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, $\nu \in N$

35. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = 0$

36. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \Re$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty$

37. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

38. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

39. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = +\infty$

40. Αν α>1, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^{x} = 0$

41. Αν α>1, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^{x} = +\infty$

42. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^{x} = +\infty$

43. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell nx = +\infty$

44. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to0^+} \ell nx = 0$

45. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες κοντά στο $x_0 \in R\cup\{-\infty, +\infty\}$. Αν ισχύουν $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

46. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες κοντά στο $x_0 \in R\cup\{-\infty, +\infty\}$. Αν ισχύουν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

47. Αν η συνάρτηση f+g είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο σημείο x_0.

48. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ασυνεχείς στο σημείο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι ασυνεχής στο σημείο x_0.

49. Αν η συνάρτηση f+g είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η g μπορεί να είναι ασυνεχής στο σημείο x_0.

50. Αν η συνάρτηση f+g είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε οι συναρτήσεις f και g μπορεί να είναι ασυνεχείς στο σημείο x_0.

51. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε και η $|f|$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.

52. Αν η συνάρτηση $|f|$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.

53. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε και η σύνθεση τους gof είναι συνεχής στο x_0.

54. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε είναι συνεχής και στο α και στο β.

55. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)>0 και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε f(ξ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β)<0

56. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$, τότε η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει καμία ρίζα στο (α,β).

57. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.

58. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

59. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

60. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

61. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

62. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

63. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή το $[f(\beta), f(\alpha)]$

64. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β) όπου $A = \lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

2.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

1. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2. Έστω μια συνάρτηση f και $x_0 \in \Delta_f$. Αν ισχύει:

   $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

3. Την κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την λέμε και κλίση της C_f.

4. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ, της εφαπτομένης στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

6. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

7. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

8. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in \mathrm{N}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$

9. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0 και ισχύει $f'(0)=0$

10. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$

11. Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

12. Ισχύει: $(\eta\mu x)'=-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\Re$

13. Η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$

14. Αν οι συναρτήσεις f, g και h είναι παραγωγίσιμες σε διάστημα Δ, τότε $(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g'(x)\cdot h'(x)$, $x \in \Delta$

15. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

16. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

17. Η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$

18. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re_1 = \Re - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

19. Η συνάρτηση f(x)=εφx είναι παραγωγίσιμη στο $\Re_1 = \Re - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

20. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re_2 = \Re - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

21. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(fog)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

22. Αν y=f(u) και u=g(x), ισχύει: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

23. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\Re-Z$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

24. Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\Re-Z$ για α>1 είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$

25. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{x}$, α>0 είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^{x}\ell nx$

26. Για κάθε x>0 ισχύει: $\left(x^{x}\right)'=x\cdot x^{x-1}$

27. Για κάθε x>0 ισχύει: $\left(x^{x}\right)'=x^{x}\ell nx$

28. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει: $\left[\ell n|x|\right]'=\frac{1}{x}$

29. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y=f(x), όταν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$

30. Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς τον χρόνο t την χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$

31. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει f(α)=f(β) με α<β, τότε ορίζεται η $\frac{1}{f'(x)}$ στο [α,β].

32. Μεταξύ δυο ριζών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντοτε μια τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

33. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε διάστημα Δ και $f'(x)\neq 0$, σε κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι 1 - 1 στο Δ.

34. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

35. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με f(β)<f(α), τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)<0$

36. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re^*$ και $f'(x)=0$, για κάθε $x \in \Re^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\Re^*$

37. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

38. Αν $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x \in \Re$, τότε $f(x)=ce^x$, $c \in \Re$, $x \in \Re$

39. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

40. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ.

41. Αν μια συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Re$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\Re$.

42. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$, για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι

1 – 1 στο Δ.

43. Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, τότε παρουσιάζει και ολικά ακρότατα.

44. Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντα μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

45. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0) = 0$.

46. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, τότε στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

47. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ στο οποίο $f'(x_0) = 0$, τότε στο x_0 η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

48. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

49. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ανοικτό διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε δεν έχει τοπικά ακρότατα.

50. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

51. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

52. Αν μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

53. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

54. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f''(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

55. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και η f είναι κοίλη στο Δ, τότε $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

56. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

57. Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$

58. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε η f στο x_0 παρουσιάζει καμπή.

59. Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Re$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

60. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re$ και $\alpha\neq 0$, έχει πάντα ένα ακριβώς σημείο καμπής.

61. Για κάθε $x\in R$, ισχύει ότι $e^x\geq x+1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

62. Για κάθε $x>0$, ισχύει ότι $\ln x\geq x-1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

63. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $\ell\in\Re$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

64. Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$

65. Αν η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τότε η f δεν ορίζεται για $x=x_0$.

66. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

67. Αν $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\ell\in\Re$, τότε η ευθεία $\psi=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

68. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

69. Μια συνάρτηση συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, δεν έχει ασύμπτωτες.

70. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του $2^{ου}$, δεν έχουν ασύμπτωτες.

71. Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δυο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

72. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\Re\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

1. Κάθε συνάρτηση σε διάστημα Δ, έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
2. Το σύνολο των παραγουσών της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x,\ x\in\Re$ είναι $F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\Re,\ x\in\Re$
3. Το σύνολο των παραγουσών της συνάρτησης f(x)=συνx, $x\in\Re$ είναι $F(x)=-\eta\mu x+c,\ c\in\Re,\ x\in\Re$
4. Αν η συνάρτηση F είναι παράγουσα της συνάρτησης f και $\lambda\in\Re^*$, τότε η συνάρτηση λF είναι μια παράγουσα της συνάρτησης λf.
5. Αν οι συναρτήσεις F και G είναι παράγουσες των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, τότε η συνάρτηση $F\cdot G$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $f\cdot g$.
6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta\in\Delta$ ισχύει πάντοτε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$
7. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και α, β$\in$ Δ με α=β, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$
8. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\Delta$ και $\alpha,\beta\in\Delta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$
9. Αν f συνεχής στο [α, β] και f(x)≥0 για κάθε x$\in$[α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.
10. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα [α,β] και f(x)>0, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$
11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα [α,β] και f(x)≠0, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta f(x)dx\neq 0$
12. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε f(x)>0 για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

13. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι f(x)≥ 0 για κάθε x∈ [α, β].

14. Αν f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β] με f(x)≥ g(x) για κάθε x∈ [α, β], τότε θα ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

15. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού ίση με την g στο [α,β], τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx < \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$

16. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ και υπάρχει ξ ∈ [α, β] με f(ξ)≠g(ξ), τότε θα ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

17. Ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\alpha-\beta)$, όπου $c \in \Re$.

18. Αν f, g συνεχείς στο [α, β], τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x)+g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

19. Αν f, g συνεχείς στο [α, β], τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

20. Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β], τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)+g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} g(x)dx \text{ με } \gamma \in [\alpha,\beta]$$

21. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

22. Αν $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, τότε το πεδίο ορισμού της F είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της f.

23. Αν f συνεχής στο $\Re$, τότε $\left(\int_{-2}^{x} f(t)\,dt\right)' = -2f(x)$

24. Αν f συνεχής σε διάστημα Δ και η $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε κατ' ανάγκη $\alpha \in \Delta$.

25. Αν f, g συνεχείς στο $\Re$ ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(x)\cdot g'(x)$

26. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] και G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

27. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], τότε υπάρχει πάντοτε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ και είναι πραγματικός αριθμός.

28. Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$, $\alpha,\beta \in \Re$

29. Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x dx = \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\alpha,\beta \in \Re$

30. Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = [\ell nx]_{\alpha}^{\beta}$.

31. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ με $\alpha,\beta \in \Delta$ τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

32. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε αναγκαστικά θα είναι f(x)=0, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

33. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ με $\alpha,\beta \in \Delta$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε ή f(x)=0 για κάθε $x \in \Delta$ ή α=β.

34. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε f(ξ)=0 για κάποιο ξ $\in$ (α, β).

35. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α, β], τότε η f παίρνει δύο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

36. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right)' = f(x)$$

37. Αν $f(x) = \int_1^3 \sqrt{t^2+1}\,dt$, τότε f΄(2)=0

38. Αν οι συναρτήσεις f΄, g΄ είναι συνεχείς στο [α, β] τότε:
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

39. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον x΄x και τις ευθείες x=α, x=β.

40. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον x΄x και τις ευθείες x=α και x=β.

2.5 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ»

2.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Σ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Λ
6. Λ
7. Σ
8. Λ
9. Λ
10. Σ
11. Σ
12. Σ
13. Λ
14. Λ
15. Λ
16. Λ
17. Σ
18. Σ
19. Λ
20. Σ
21. Σ
22. Σ
23. Λ
24. Λ
25. Σ
26. Σ
27. Λ (π.χ. f(x)=ημx)
28. Σ
29. Σ
30. Λ (π.χ. $f(x)=\frac{1}{x}$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{x}$

    ή $f(x)=-x$, $f^{-1}(x)=-x$)

2.2 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Σ
5. Σ
6. Λ (π.χ. $f(x)=x^2>0$, κοντά στο $x_0=0$.

   Όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$)
7. Λ
8. Σ
9. Λ
10. Λ
11. Σ
12. Σ

13. Λ
14. Σ
15. Σ
16. Σ
17. Σ
18. Σ
19. Σ
20. Λ (π.χ $f(x)=\frac{|x|}{x}$, στο $x_0=0$)
21. Σ
22. Σ
23. Σ
24. Λ
25. Σ
26. Λ
27. Λ (π.χ $f(x)=\frac{1}{x}$, είναι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=0$,

    Όμως $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει)
28. Σ
29. Λ (είναι μηδέν)
30. Λ
31. Λ (π.χ $\lim_{x\to 0} x=0$, όμως $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

    δεν υπάρχει)
32. Σ
33. Σ
34. Λ
35. Λ
36. Λ
37. Λ
38. Σ
39. Λ
40. Σ
41. Σ
42. Σ
43. Σ
44. Λ
45. Σ
46. Λ
47. Λ
48. Λ
49. Λ (Είναι g(x)=(f+g)(x) - f(x) άρα g συνεχής, ως διαφορά συνεχών)
50. Σ
51. Σ
52. Λ (π.χ η $f(x) = \begin{cases} x, & x\geq 1 \\ -x, & x<1 \end{cases}$)
53. Λ
54. Λ
55. Λ
56. Λ
57. Λ
58. Λ
59. Σ
60. Σ
61. Λ
62. Σ
63. Λ
64. Σ

2.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Σ
5. Λ (π.χ η $f(x)=|x|$, στο x_0=0)
6. Σ
7. Σ
8. Λ
9. Λ
10. Λ
11. Λ
12. Λ
13. Σ
14. Λ
15. Λ
16. Σ
17. Λ
18. Λ
19. Σ
20. Σ
21. Λ
22. Σ
23. Σ
24. Σ
25. Λ
26. Λ
27. Λ
28. Σ
29. Σ
30. Σ
31. Λ
32. Σ
33. Σ (Αν δεν είναι 1 - 1,με Rolle, άτοπο)
34. Σ
35. Σ
36. Λ (π.χ $f(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ -1, x<0 \end{cases}$)
37. Λ
38. Σ
39. Λ
40. Λ (π.χ η $f(x)=x^3$)
41. Σ (η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο)
42. Σ
43. Λ
44. Λ
45. Λ (πρέπει x_0 εσωτερικό)
46. Σ
47. Λ (π.χ η $f(x)=x^3$, στο x_0=0)
48. Σ
49. Σ
50. Λ
51. Σ
52. Λ
53. Λ
54. Σ

55. Λ (π.χ η $f(x)=-x^4$)

56. Λ (πρέπει να ορίζεται και η εφαπτομένη στο Α)

57. Σ

58. Λ (π.χ η $f(x)=x^4$, στο x_0=0)

59. Σ

60. Σ

61. Σ

62. Λ

63. Λ

64. Λ

65. Λ (η f(x)= $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \frac{1}{x}, x>0 \end{cases}$ έχει κατακόρυφη την x=0 (από δεξιά), αλλά ορίζεται στο x_0=0)

66. Λ

67. Σ

68. Σ

69. Σ

70. Σ

71. Σ

72. Λ

2.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Λ (π.χ. η f(x)= $\begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ δεν έχει παράγουσα γιατί δεν είναι συνεχής στο x_0=0)
2. Σ
3. Λ
4. Σ
5. Λ
6. Σ
7. Σ
8. Λ (θα πρέπει α<β)
9. Σ
10. Σ
11. Σ
12. Λ (π.χ $\int_{-1}^{2} x^3 dx = \frac{15}{4}$, αλλά $f(x) = x^3$ δεν είναι f(x)>0 για $x \in [-1, 2]$)
13. Λ
14. Σ
15. Σ
16. Σ
17. Λ
18. Σ
19. Λ
20. Λ
21. Σ
22. Λ
23. Λ
24. Σ
25. Λ
26. Σ
27. Σ
28. Σ
29. Λ
30. Λ
31. Λ (π.χ $\int_{-1}^{1} x dx = 0$)
32. Λ (π.χ $\int_{0}^{\pi}$ συνxdx=0), αλλά δεν είναι συνx=0 για κάθε x $\in$[0, π])
33. Λ (π.χ. $\int_{-1}^{1} x dx = 0$)
34. Σ (αν f(x)$\neq$0, x$\in$(α,β) … άτοπο)
35. Σ
36. Λ
37. Σ
38. Σ
39. Λ
40. Σ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο}

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ - ΛΑΘΟΥΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2000 - 2017

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη ΛΑΘΟΣ αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\Re$ και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα τότε η gof ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$
3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
4. Μία συνάρτηση $f : A \to \Re$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$
5. Μια συνάρτηση $f:A \to \Re$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
6. Αν μια συνάρτηση $f:A\to\Re$ είναι 1−1, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
7. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
8. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

9. Αν μια συνάρτηση $f: A \to \Re$ είναι 1–1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$

10. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

11. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

12. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

3.2 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

2. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) - \lambda) = 0$$

3. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0, τότε αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$ είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

5. Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \Re$

6. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

7. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x)>0 κοντά στο x_0.

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0.

10. Αν α>1, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$

11. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = +\infty$

12. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha^x = 0$

13. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$

14. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to -\infty} \alpha^x = +\infty$

15. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

16. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x)<0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

17. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0.

18. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty$

19. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

20. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f: $\Re\to\Re$ και g: $\Re\to\Re$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x)g(x)\right] = 0$.

21. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

22. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

23. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η συνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

24. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α)<0 και υπάρχει $\xi \in(\alpha, \beta)$ ώστε f(ξ)=0, τότε κατ' ανάγκη f(β)>0.

25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

26. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

27. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε ή αυτή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή έχει σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

28. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

29. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α, Β), όπου: $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

30. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή.

31. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m.

3.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

4. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

5. Για κάθε $x \in \Re$ ισχύει ότι (συνx)΄= ημx.

6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$

7. Για κάθε $x \in \Re_1 = \Re - \{x / συνx = 0\}$ ισχύει $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2 x}$

8. $(σφx)' = \dfrac{1}{ημ^2 x}$, $x \in \Re - \{x / ημx = 0\}$

9. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \Re$

10. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β], στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

11. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f΄(x)=0 για κάθε $x \in (α, x_0) \cup (x_0, β)$, είναι σταθερή στο $(α, x_0) \cup (x_0, β)$.

12. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f΄(x)=g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε f(x)=g(x), για κάθε $x \in$ Δ.

13. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

14. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

15. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

16. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

17. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in$ [α, β] στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

18. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

19. Για κάθε συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \Re$.

20. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β),με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

21. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

22. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

23. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

24. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

25. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β),με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α(x_0, $f(x_0)$) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

26. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

3.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε x∈[α, β] ισχύει $f(x)\geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

2. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε x∈[α, β] και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

3. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και α,β,γ∈ Δ, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$

4. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$

5. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ισχύει: $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) - f(\alpha)$, για κάθε x ∈ Δ

6. Ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

7. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f: [α, β] $\to\Re$, αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

8. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (f'(x)\cdot g(x))dx$

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left[xf(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$$

10. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

11. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in$[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x΄x είναι $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

3.5 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ» ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ

3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Λ
5. Σ
6. Λ
7. Σ
8. Λ
9. Σ
10. Σ
11. Σ
12. Λ

3.2 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Σ
2. Σ
3. Λ
4. Σ
5. Σ
6. Λ
7. Λ
8. Σ
9. Σ
10. Σ
11. Λ
12. Σ
13. Λ
14. Σ
15. Σ
16. Λ
17. Λ
18. Σ
19. Σ
20. Λ
21. Σ
22. Σ
23. Λ
24. Λ
25. Λ
26. Σ
27. Σ
28. Σ
29. Σ
30. Λ
31. Σ

3.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

1. Σ
2. Λ
3. Λ (Η $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\dfrac{1}{x}, & αν\ x \neq 0 \\ 0, & αν\ x = 0 \end{cases}$ αν και είναι παραγωγίσιμη στο x_0=0.

   Όμως η $f'(x) = \begin{cases} 2xημ\dfrac{1}{x} - συν\dfrac{1}{x}, & αν\ x \neq 0 \\ 0 \quad , & αν\ x = 0 \end{cases}$, δεν είναι συνεχής στο x_0=0 γιατί το

   $\lim\limits_{x \to 0} συν\dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει.
4. Σ
5. Λ
6. Λ
7. Λ
8. Λ
9. Λ
10. Σ (Αφού δεν είναι αντιστρέψιμη, δεν θα είναι 1–1, άρα θα υπάρχουν x_1, $x_2 \in \Re$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)$, οπότε ισχύει το Rolle στο $[x_1, x_2]$).
11. Λ (βλέπε ισχυρισμό 5, σελ. 70)
12. Λ
13. Λ (βλέπε ισχυρισμό 6, σελ. 71)
14. Σ (βλέπε ισχυρισμό 7, σελ. 71)
15. Λ
16. Σ
17. Λ (δεν είναι το x_0 εσωτερικό σημείο)
18. Λ (βλέπε ισχυρισμό 8, σελ. 71)
19. Λ (βλέπε ισχυρισμό 9, σελ. 71)
20. Λ (έχει τοπικό μέγιστο)
21. Σ

22. Λ (βλέπε ισχυρισμό 10, σελ. 72)
23. Λ (βλέπε ισχυρισμό 10, σελ. 72)
24. Λ
25. Λ (πρέπει να ορίζεται και η εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$)
26. Σ

3.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Σ
5. Λ
6. Σ
7. Λ
8. Σ
9. Σ ($\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x'f(x)dx$ και μετά παραγοντική ολοκλήρωση)
10. Σ (αν f συνεχής στο [α, β])
11. Λ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Θεωρήστε τους παρακάτω ισχυρισμούς.

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής

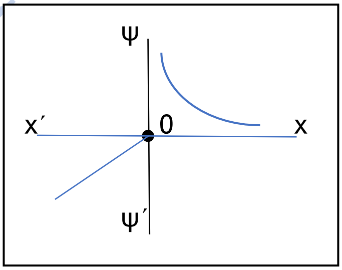
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α)

1. «Κάθε συνάρτηση f που είναι 1 – 1 είναι και γνησίως μονότονη»

Πανελλαδικές 2018

α) Ψ

β) Η $f(x)=\begin{cases} x, & \text{αν } x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x>0 \end{cases}$



Είναι 1–1 όμως δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της αφού στο $(-\infty,\ 0]$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο $(0,\ +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2. «Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2018$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.»

α) Α

β) Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ $\left(\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2018\right)$

Άρα $f(x)=g(x)\cdot(x-1)$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[g(x)(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 1}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=2018\cdot 0=0$

3. «Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.»

α) Α

β) Ισχύει ότι $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$, για x κοντά στο x_0.

Όμως $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)=\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

4. «Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f,g: $(0, +\infty)\to\Re$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$ »

Επαναληπτικές Πανελλαδικές 2018

α) Ψ

β) Αν $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τότε έχουμε

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty,\ \lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}+1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$

5. «Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.»

Πανελλαδικές 2017

α) Ψ

β) Η f(x)= $|x|$ αν και είναι συνεχής στο $x_0=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$,

δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$

6. «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\Re^*$ και $f'(x)=0$, $x\in\Re^*$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\Re^*$.»

α) Ψ *Πανελλαδικές 2019*

β) Η $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν } x<0\\ 1, & \text{αν } x>0\end{cases}$

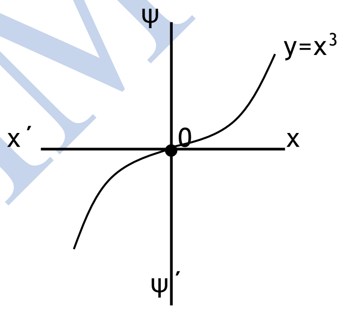
Είναι $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

7. «Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ, τότε η $f'(x)>0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ.»

α) Ψ

β) Η $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, όμως η $f'(x)=3x^2$ δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$.



8. «Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.»

α) Α

β) Η $f(x)=x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, όμως η $f'(x)=3x^2$ δεν είναι θετική σε όλο το $\Re$, αφού $f'(0)=0$.

9. «Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και για κάποιο εσωτερικό σημείο $x_0\in\Delta$ ισχύει $f'(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι κατ' ανάγκη θέση τοπικού ακρότατου.»

α) Ψ

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν και ισχύει $f'(0)=0$ όμως το $x_0=0$ δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

10. «Για κάθε συνάρτηση f:$\mathfrak{R}\rightarrow\mathfrak{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε x $\in\mathfrak{R}$.»

α) Ψ

β) Η $f(x)=x^3$ αν και δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, όμως $f'(x)=3x^2$ και $f'(0)=0$, άρα δεν ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathfrak{R}$.

11. «Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η $f''(x)>0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ.»

α) Ψ

β) Η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathfrak{R}$, αφού η $f'(x)=4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathfrak{R}$.

Όμως $f''(x)=12x^2$ δεν είναι θετική σ' όλο το $\mathfrak{R}$, αφού $f''(0)=0$.

12. « Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και για κάποιο εσωτερικό σημείο $x_0\in\Delta$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση καμπής της f.»

α) Ψ

β) Για τη συνάρτηση $f(x)=x^4$ αν και ισχύει $f''(0)=0$ όμως το $x_0=0$ δεν είναι θέση καμπής της f, αφού η f είναι κυρτή στο $\mathfrak{R}$.

13. «Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν παρουσιάζει καμπή, ισχύει $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathfrak{R}$.»

α) Ψ

β) Η $f(x)=x^4$ αν και δεν παρουσιάζει καμπή. Όμως $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$, και $f''(0)=0$, άρα δεν ισχύει $f''(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathfrak{R}$.

14. «Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε f(ξ)=0 για κάποιο ξ∈(α, β)»

α) Α

β) Έστω ότι δεν υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο ώστε f(ξ)=0 τότε θα ισχύει f(x)≠0, x∈(α, β) και επειδή f συνεχής στο [α, β] θα έχει σταθερό πρόσημο στο (α, β).

Δηλαδή η f(x)>0, για κάθε x∈(α, β) ή f(x)<0, για κάθε x∈(α, β)

- Αν f(x)>0, για κάθε x∈(α, β), θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, άτοπο αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

- Αν f(x)<0, για κάθε x∈(α, β), θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$, άτοπο αφού $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

Άρα υπάρχει ξ∈(α, β) ώστε f(ξ)=0.

15.«Αν f συνεχής στο [α, β] και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο [α, β], τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο [α, β].»

α) Α

β) Αν η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β] έχουμε:

- Αν f(x)≥ 0, x ∈ [α, β] και αφού η f δεν είναι παντού μηδέν τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, άτοπο
- Αν f(x) ≤0, x ∈ [α, β] και αφού η f δεν είναι παντού μηδέν τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$, άτοπο

Άρα η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β], δηλαδή η f παίρνει τουλάχιστον δύο ετερόσημες τιμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (σελ 83-85)

Ι.

1. α) Ψ, γιατί είναι $\Delta_f = (0,+\infty)$ β) Α

2. Α (θέτουμε $\frac{f(x)}{x-1} = g(x)$)

3. Ψ, γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\frac{1}{x^2+x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x(x+1)} = 1$

4. Ψ, γιατί π.χ. η $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ αν και $f(x) > 1,\ x \in \Re$ είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

5. α) Α β) Ψ, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$ (κριτ. παρεμβολής)

6. Α (κριτήριο παρεμβολής)

7. Ψ, γιατί π.χ. η $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$, x>0 αν και $f(x) < \frac{1}{x^2}$, x>0 είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

8. Ψ, ισχύει μόνο αν f, g συνεχείς στο x_0=6

9. Ψ π.χ. η $f(x) = \frac{|x|}{x}$

10. Α

11. Α, αφού $f(4) = \lim\limits_{x\to 4} f(x)$

12. Α (θεώρημα ενδιαμέσων τιμών)

ΙΙ.

1. Β π.χ. $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}$, x>0 όμως $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

2. Ε

3. Ε Γιατί: $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2-1\right)=+\infty$, άρα υπάρχει α>0 ώστε $x^3-x^2-1>0$, x>α

4. Δ

ΙΙΙ.

1. Γ (είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο ορισμού της)

2. Α, Γ, Ε

3. Ε

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (σελ. 177-181)

Ι.

1. Α, γιατί αν f(0) = f(1) από Rolle άτοπο.

2. Α, γιατί η f ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ στο [α, β] οπότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<0$. Είναι $f(\beta)-f(\alpha)<0$ και β-α>0

3. Α από Rolle για την f - g στο [α, β]

4. α) Ψ β) Α

5. α) Α, γιατί η f΄ πολυωνυμική περιττού βαθμού, άρα έχει ρίζα στο $\Re$.

β) Ψ, π.χ. η $f(x)=\frac{x^3}{3}+x$, $f'(x)=x^2+1\neq 0 \quad x\in\Re$

6. Α, f΄΄(x)=6αx + 2β, α$\neq$0, αλλάζει πρόσημο.

7. Ψ, π.χ. $f(x)=x^3+x$ και $g(x)=x^5+x$.

8. Α, θεώρημα Fermat

9. α) Ψ, β)Α

10. i) Ψ, γιατί υπάρχει $x_0 \in (1,4)$ ώστε $f'(x_0) = 0$ (οριζόντια εφαπτομένη)

ii) Ψ, όμοια

iii) Ψ, γιατί στο $[x_0, 4]$ η f ↧

iv) Α, θεώρημα Rolle στο [1, 4]

11. α) Ψ, γιατί f(x)>0, $x \in (0,1)$

β) Α, γιατί ισχύει Bolzano και f ↥ στο (-1,0)

γ) Ψ, γιατί f΄(x)>0 για κάθε $x \in \Re$, άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

12. Α, γιατί

i. $(fog)'(0) = f'(g(0))g'(0) = f'(5)\cdot 1 = 6$

ii. $(gof)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(4)\cdot 3 = 6$

II.

1. Β   2. Γ   3. Ε   4. Γ   5. Γ   6. Γ
7. Ε   8. Γ

III.

1. $\alpha \to$ Ε $\beta \to$ Α $\gamma \to$ Β $\delta \to$ Δ

2. $1 \to$ Δ $2 \to$ Γ $3 \to$ Α

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (σελ. 236 - 237)

I.

1. Α, αν f, g συνεχείς.

2. Ψ, π.χ. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

3. Α

4. Ψ, π.χ. $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

5. Α

6. Ψ, π.χ. $\int_0^4 (x^2-1)dx = 0$

7. Α, αφού γίνεται $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 dx > 0$, που ισχύει για α>0

8. Α, αφού $\ln(1-\eta\mu^2 x) = \ln(\sigma\upsilon\nu^2 x) = 2\ln(\sigma\upsilon\nu x),\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

9. Α, αφού $\int f(x)dx = \int x' f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$

10. Α, αφού $\ln\frac{1}{t} = -\ln t$

11. Α, αφού $\bar{f} = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$ (εκτός ύλης)

12. Α, από Rolle για την $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ στο [α, β]

13. Α, γιατί αν η f είχε σταθερό πρόσημο στο [α, β] τότε και $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$, άτοπο

14. Ψ, $E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |x^3 - x| dx$

ΙΙ.

1. Δ, αφού $f(x) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\pi x}{\pi}$

2. Δ, αφού $\int \frac{1}{4-x}dx = -\ln|4-x| + c = -\ln(x-4) + c,\ x > 4$

3. Δ

4. Α

5. Γ

6. Β

7. Δ

8. Β

9. Γ, αφού F΄(x) = f(x)

10. Γ

11. Δ

ΙΙΙ

1. Δ (εκτός ύλης)

2. Β και ΣΤ

3. Λείπει η σταθερά ολοκλήρωσης
(βλέπε θεωρία σχολ. βιβλίου, σελ. 192)

4. Το λάθος είναι ότι ενώ $x \in (-1,1)$ δηλ. παίρνει την τιμή 0, το 1/u δεν παίρνει την τιμή 0.

5. F(0) = 0 F(2) = 2 F(3) = 4 F(4) = 6 F(6) = 12

ΤΥΠΟΛΟΓΙΑ

1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1	$\left(f^{\alpha}(x)\right)' = \alpha\left(f(x)\right)^{\alpha-1}\cdot f'(x)$
2	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$
3	$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{f^{2}(x)}\cdot f'(x)$
4	$\left(\eta\mu f(x)\right)' = \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)$
5	$\left(\sigma\upsilon\nu f(x)\right)' = -\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$
6	$\left(\varepsilon\varphi f(x)\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2} f(x)}\cdot f'(x)$
7	$\left(\sigma\varphi f(x)\right)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^{2} f(x)}\cdot f'(x)$
8	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$
9	$\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)}\cdot \ln\alpha\cdot f'(x) \quad (\alpha>0,\ \alpha\neq 1)$
10	$\left(\ln\lvert f(x)\rvert\right) = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

- Για τους x για τους οποίους έχουν νόημα τα σύμβολα

2. ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α/Α	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΑΡΑΓΟΥΣΕΣ
1	$f(x)=0$	$F(x)=c,\ c\in\Re$
2	$f(x)=1$	$F(x)=x+c,\ c\in\Re$
3	$f(x)=x^{\alpha},\alpha\neq -1$	$F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ c\in\Re$
4	$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c,\ c\in\Re$
5	$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\sqrt{x}+c,\ c\in\Re$
6	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c,\ c\in\Re$
7	$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$	$F(x)=\eta\mu x+c,\ c\in\Re$
8	$f(x)=\eta\mu x$	$F(x)=-\sigma\upsilon\nu x+c,\ c\in\Re$
9	$f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$F(x)=\varepsilon\varphi x+c,\ c\in\Re$
10	$f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$F(x)=-\sigma\varphi x+c,\ c\in\Re$
11	$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c,\ c\in\Re$
12	$f(x)=\alpha^x,\alpha>0,\alpha\neq 1$	$F(x)=\frac{\alpha^x}{\ln\alpha}+c,\ c\in\Re$

- Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1	$\int_{\alpha}^{\beta} dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1dx = \left[x\right]_{\alpha}^{\beta}$
2	$\int_{\alpha}^{\beta} cdx = c\int_{\alpha}^{\beta} 1dx = c\left[x\right]_{\alpha}^{\beta} = c(\beta-\alpha)$
3	$\int_{\alpha}^{\beta} x^{\kappa}dx = \left[\frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$, $\kappa \in \Re - \{-1\}$
4	$\int_{\alpha}^{\beta} x^{-1}dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}dx = \left[\ln\lvert x\rvert\right]_{\alpha}^{\beta}$
5	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$
6	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$
7	$\int_{\alpha}^{\beta} συνx dx = \left[ημx\right]_{\alpha}^{\beta}$
8	$\int_{\alpha}^{\beta} ημx dx = \left[-συνx\right]_{\alpha}^{\beta}$
9	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{συν^2x}dx = \left[εφx\right]_{\alpha}^{\beta}$
10	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ημ^2x}dx = \left[-σφx\right]_{\alpha}^{\beta}$
11	$\int_{\alpha}^{\beta} e^{x}dx = \left[e^{x}\right]_{\alpha}^{\beta}$
12	$\int_{\gamma}^{\beta} \alpha^{x}dx = \left[\frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha}\right]_{\gamma}^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

ΠΡΟΣΟΧΗ: $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

4. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1	$\int_{\alpha}^{\beta} f^{\kappa}(x)\cdot f'(x)dx = \left[\frac{f^{\kappa+1}(x)}{\kappa+1}\right]_{\alpha}^{\beta}, \kappa \in \Re - \{-1\}$
2	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx = \left[\ln\lvert f(x)\rvert\right]_{\alpha}^{\beta}$
3	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)dx = \left[2\sqrt{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
4	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x)dx = \left[-\frac{1}{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
5	$\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu f(x)\cdot f'(x)dx = \left[\eta\mu f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$
6	$\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu f(x)\cdot f'(x)dx = \left[-\sigma\upsilon\nu f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$
7	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)dx = \left[\varepsilon\varphi f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$
8	$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)dx = \left[-\sigma\varphi f(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$
9	$\int_{\alpha}^{\beta} e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \left[e^{f(x)}\right]_{\alpha}^{\beta}$
10	$\int_{\gamma}^{\beta} \alpha^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \left[\frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha}\right]_{\gamma}^{\beta}, \alpha > 0, \alpha \neq 1$

ΠΡΟΣΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Οι παρακάτω προσθήκες είναι βασικές προτάσεις που μπορούν να χρησιμοποιούνται πια χωρίς καμία απόδειξη ή άλλη αναφορά για τη λύση σχετικών ασκήσεων. Αναφέρονται στις οδηγίες διδασκαλίας για το σχολικό έτος 2018 - 2019.

1.i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in$ Δ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε x_1, $x_2 \in$ Δ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$$

2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty)$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και β) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

3. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ισχύουν: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = +\infty$ (ή $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = -\infty$), τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\Re$.

4. Για κάθε x>0 ισχύει ότι $\ln x \leq x-1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για x=1.

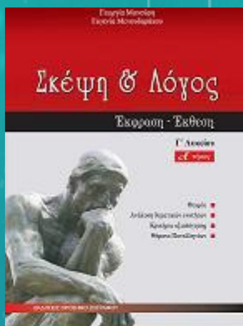
5. Για κάθε $x \in \Re$, ισχύει ότι $e^x \geq x+1$. Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0.

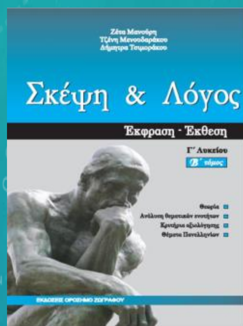
6. Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β].

- Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.
- Αν, <u>επιπλέον</u>, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο [α, β] (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, με $f(\xi) \neq g(\xi)$), τότε θα ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

κυκλοφορούν

ΕΚΦΡΑΣΗ-ΕΚΘΕΣΗ
Σκέψη & Λόγος
Α & Β τόμος





ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
«ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ»

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ
ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ
Τραυλαντώνη 18, 15771 Ζωγράφου
Τηλ.:210 7470344 - 210 7470395
email:info@orosimo.eu
www.orosimo.eu

ISBN: 978-618-80731-4-2

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΟΡΟΣΗΜΟ ΖΩΓΡΑΦΟΥ