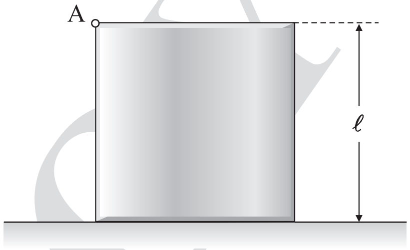
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

από το βιβλίο του Γιάννη Καλιμάνη

Φυσική Γ΄ Λυκείου Θ/Τ Κατεύθυνσης
Μηχανική Στερεού Σώματος

22. Ένα κιβώτιο σχήματος κύβου ακμής ℓ είναι γεμάτο με άμμο και έχει συνολικό βάρος $w = 460\ \text{N}$. Θέλουμε να “αναποδογυρίσουμε” το κιβώτιο ωθώντας το οριζόντια στο σημείο Α.



α. Ποια η ελάχιστη οριζόντια δύναμη που απαιτείται;

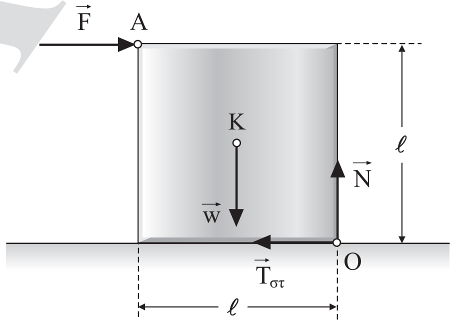
β. Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής τριβής μεταξύ κιβωτίου - εδάφους στην παραπάνω περίπτωση;

γ. Υπάρχει πιο αποδοτικός τρόπος για να αναποδογυρίσουμε το κιβώτιο, ασκώντας δύναμη στο ίδιο σημείο του κιβωτίου;

Αν ναι, βρείτε το μέτρο και τη διεύθυνση της ελάχιστης δύναμης που απαιτείται.

Λύση

α. Στην οριακή περίπτωση ανατροπής του κιβωτίου η αντίδραση του δαπέδου $\vec{A}$ διέρχεται από το Ο.



Για να ανατραπεί το κιβώτιο, πρέπει ως προς το Ο:

$$\tau_F \geq \tau_W \quad ή \quad F\cdot\ell \geq w\frac{\ell}{2} \quad ή \quad F \geq \frac{w}{2} \quad ή$$

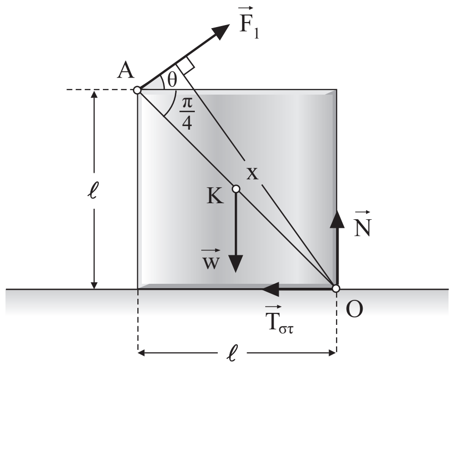
$$F_{min} = \frac{w}{2} \quad ή \quad F_{min} = 230\ \text{N}$$

β. Όταν το μέτρο της F είναι ελάχιστο, το μέτρο της στατικής τριβής είναι μέγιστο, άρα:

$T_{στ} = T_{ορ} = \mu N$ (Αφού το κιβώτιο είναι έτοιμο να ολισθήσει)

Ισχύει: $F_{min} = T_{ορ}$ ή $F_{min} = \mu N$ ή $F_{min} = \mu w \Rightarrow \mu = \dfrac{F_{min}}{w}$ ή $\boldsymbol{\mu = 0,5}$

γ. Η δύναμη $\vec{F}_1$ πρέπει να ασκηθεί πλάγια στο Α, έτσι ώστε να αυξηθεί ο μοχλοβραχίονας x, ως προς το Ο.



Έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F_1 x = w\frac{\ell}{2} \Rightarrow F_1 = \frac{w\ell}{2x} \qquad (1)$$

όπου: $x = (OA)ημ\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Όμως: $(AO) = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{2}$

Από (1): $F_1 = \dfrac{w\ell}{2\ell\sqrt{2}\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ή $F_1 = \dfrac{w}{2\sqrt{2}\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}$ ή

$$F_1 = \frac{w\sqrt{2}}{4\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)} \quad \text{ή} \quad F_1 = \frac{115\sqrt{2}}{\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)} \qquad (2)$$

Όταν: $F_1 = \min$, $\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\max=1$

Άρα: $\eta\mu\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}$ ή $\theta=\dfrac{\pi}{4}\mathrm{rad}$

Από (2): $F_{1(\min)}=115\sqrt{2}\ \mathrm{N}$, με γωνία $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ πάνω από τον ορίζοντα.

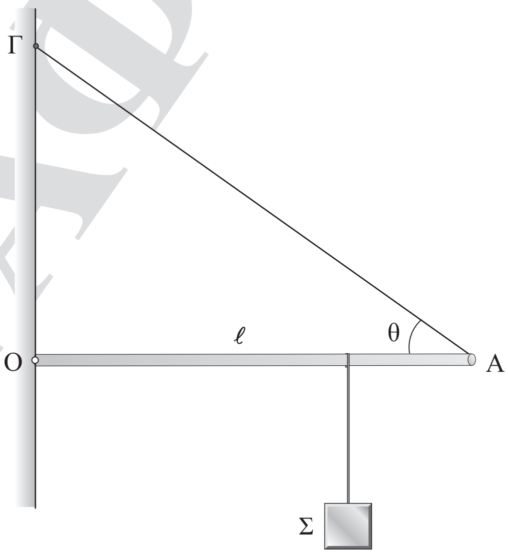
Άρα, ο μοχλοβραχίονας x ταυτίζεται με τη διαγώνιο ΑΟ του κιβωτίου.

23. Η ομογενής δοκός ΟΑ μήκους $\ell = 4\ \mathrm{m}$ και βάρους w συγκρατείται με αβαρές νήμα ΑΓ, ενώ ακουμπά το άκρο της Ο πάνω σε κατακόρυφο τοίχο. Η δοκός ισορροπεί οριζόντια. Ο συντελεστής στατικής τριβής ανάμεσα στον τοίχο και στη δοκό είναι $\mu_S = 0,5$.

Α. Σε ποια απόσταση x από το Ο, μπορούμε να κρεμάσουμε μέσω αβαρούς νήματος, ένα σώμα Σ, βάρους w, έτσι ώστε η δοκός να μην γλιστρήσει στο Ο;

Β. Αν το σώμα Σ κρεμαστεί στο κέντρο μάζας της δοκού ΟΑ, ποια η επί τοις εκατό μεταβολή του συντελεστή στατικής τριβής, έτσι ώστε πάλι η δοκός να ισορροπεί οριζόντια;

Δίνονται: ημθ = 0,6, συνθ = 0,8.



Λύση

Α. Στη δοκό (ΟΑ) ασκούνται:

– Το βάρος $\vec{w}$ στο μέσο της.

– Η τάση του νήματος $T_1 = T_1' = w$, αφού το σώμα Σ ισορροπεί.

– Η στατική τριβή $\vec{T}_S$ ανάμεσα στον τοίχο και στη δοκό στο Ο.

– Η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από τον τοίχο στο Ο.

– Η τάση του νήματος (ΑΓ) $\vec{T}$, η οποία αναλύεται σε Τημθ και Τσυνθ, όπως στο σχήμα της διπλανής σελίδας.

Έστω x η απόσταση του σημείου Ο από το σημείο από όπου κρέμεται το σώμα Σ.

Η δοκός (ΟΑ) ισορροπεί, άρα:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N = T\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (1)$$

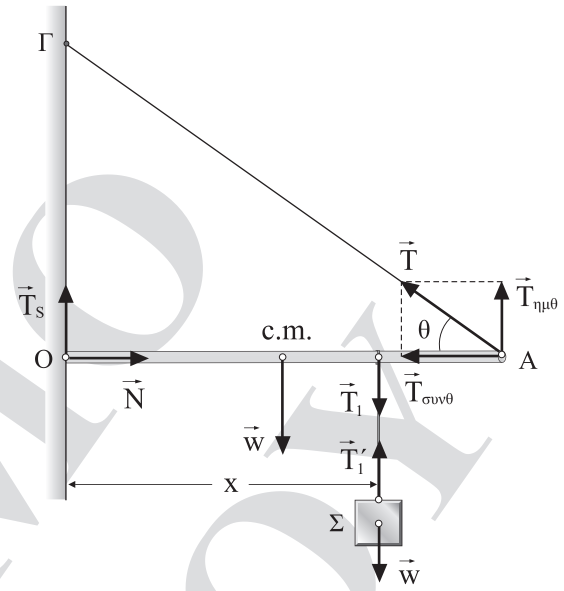
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_S + T\eta\mu\theta = T_1 + w\,,$$

Όμως : $T_S = \mu_S N \quad \Rightarrow$

$$\mu_S N + T\eta\mu\theta = 2w \qquad (2)$$

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-xw - \frac{\ell}{2}w + T\eta\mu\theta \cdot \ell = 0 \qquad (3)$$



Από (1-2) έχουμε:

$$\mu_S \cdot T\sigma\upsilon\nu\theta + T\eta\mu\theta = 2w \quad ή$$

$$T\,(\mu_S\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) = 2w \quad ή$$

$$T = \frac{2w}{\mu_S\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta} \qquad (4)$$

Από (3-4) έχουμε:

$$-xw - \frac{\ell}{2}w + \frac{2w}{\mu_S\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta} \cdot \ell\eta\mu\theta = 0 \quad ή \quad x + \frac{\ell}{2} = \frac{2\ell\eta\mu\theta}{\mu_S\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta} \quad ή$$

$$\mathbf{x = \frac{2\ell\eta\mu\theta}{\mu_S\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta} - \frac{\ell}{2}} \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στην (5):

$$x = \frac{4,8}{0,4+0,6} - 2 \quad ή \quad \mathbf{x = 2,8\,m}$$

Β. Θέτοντας στην (5) τις τιμές των ℓ, ημθ, συνθ και x = 2 (αφού το Σ κρέμεται από το κέντρο μάζας c.m. της δοκού), βρίσκουμε τη νέα τιμή του συντελεστή τριβής μ_S'.

Έχουμε:

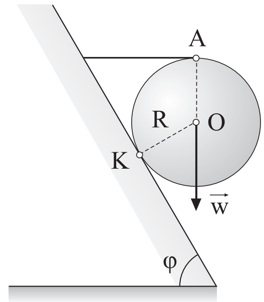
$$2 = \frac{4,8}{\mu_S' \cdot 0,8 + 0,6} - 2 \quad ή \quad 4 = \frac{4,8}{\mu_S' \cdot 0,8 + 0,6} \quad ή \quad 3,2\mu_S' + 2,4 = 4,8 \quad ή$$

$$3,2\mu_S' = 2,4 \quad ή \quad \mu_S' = 0,75$$

Άρα, έχουμε αύξηση κατά 0,25 ή επί τοις εκατό:

$$\frac{\text{αύξηση}}{\text{αρχική τιμή}}100\% = \frac{0,25}{0,5}100\% = 50\%$$

24. Σφαίρα βάρους μέτρου $w = 90$ N ισορροπεί όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



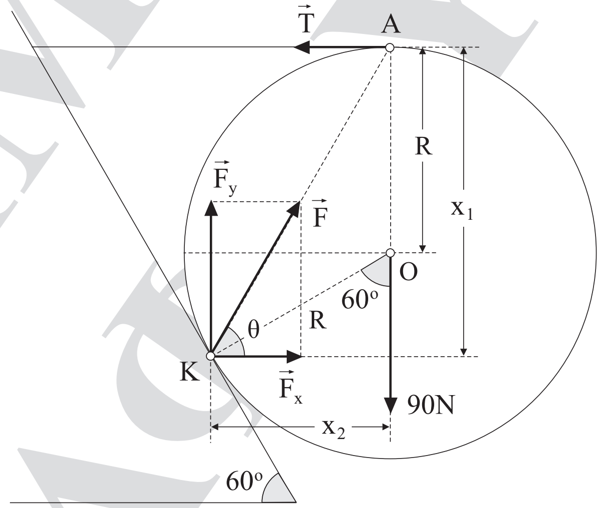
α. Να δικαιολογήσετε για το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο.

β. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα από το αβαρές σχοινί και το κεκλιμένο επίπεδο.

γ. Να υπολογίσετε την στατική τριβή και την κάθετη δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το κεκλιμένο επίπεδο.

Δίνεται ότι: $\varphi = 60^o$

Λύση



α. Ο φορέας της $\vec{F}$ πρέπει να περνά από το Α, σημείο τομής των φορέων της $\vec{T}$ και του βάρους 90 Ν. Επειδή ο φορέας της $\vec{F}$ δεν είναι κάθετος στο κεκλιμένο επίπεδο, το επίπεδο δεν είναι λείο!

β. $\Sigma F_x = 0 \;\Rightarrow\; F_x = T \qquad (1)$

$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_y = 90\text{ N} \qquad (2)$

$\Sigma\tau_{(\kappa)} = 0 \;\Rightarrow\; Tx_1 = 90x_2 \qquad (3)$

όπου $x_1 = R + R\sigma\upsilon\nu 60 = R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$,

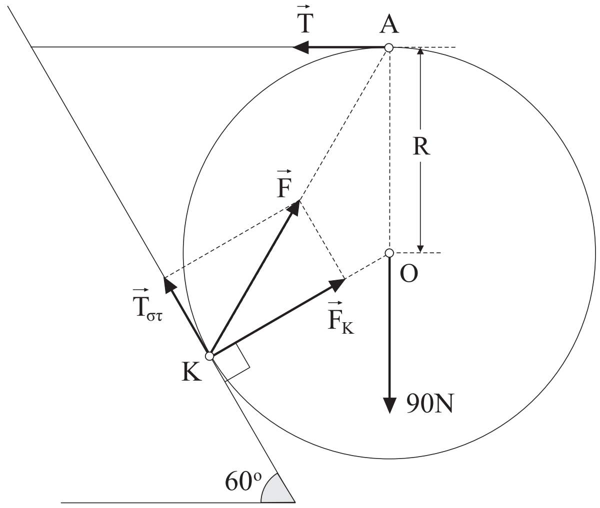
$x_2 = R\eta\mu 60 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Από (3) έχουμε:

$$\frac{T3R}{2} = \frac{90R\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad T = 30\sqrt{3}\text{ N}$$

$$F_x = 30\sqrt{3}\text{ N}, \quad F_y = 90\text{ N} \;\Rightarrow\; F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 60\sqrt{3}\text{ N}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{90}{30\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \theta = 60^o$$



γ. Αναλύουμε την $\vec{F}$ σε συνιστώσες $\vec{F}_\kappa$ και $\vec{T}_{\sigma\tau}$.

$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \;\Rightarrow\; TR - T_{\sigma\tau}(KO) = 0$ ή

$TR - T_{\sigma\tau}\cdot R = 0 \;\Rightarrow\; T_{\sigma\tau} = T = 30\sqrt{3}\text{ N}$

Ισχύει:

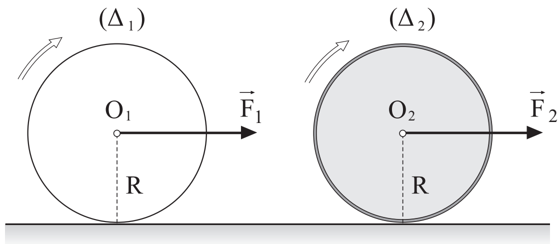
$F^2 = F_\kappa^2 + T_{\sigma\tau}^2$ ή $F_\kappa^2 = F^2 - T_{\sigma\tau}^2$ ή

$F_\kappa = \sqrt{F^2 - T_{\sigma\tau}^2} = \sqrt{60^2\cdot 3 - 30^2\cdot 3} =$

$= \sqrt{3(60^2 - 30^2)} =$

$= \sqrt{3(4^2\cdot 15^2 - 2^2\cdot 15^2)} = \sqrt{3\cdot 15^2(16-4)} = 15\sqrt{3\cdot 12} = 15\sqrt{36} = 90\text{ N}$

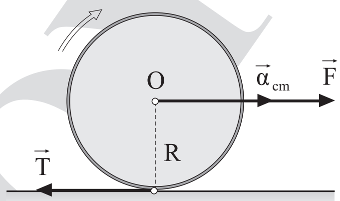
31. Οι δύο δίσκοι (Δ_1) και (Δ_2) έχουν ίδια μάζα και ίδια ακτίνα. Ο (Δ_1) είναι κούφιος ενώ ο (Δ_2) είναι συμπαγής. Την $t = 0$ ασκούνται στα κέντρα μάζας των δίσκων σταθερές οριζόντιες δυνάμεις ίσου μέτρου, $F_1 = F_2 = F$, όπως στο σχήμα. Οι δίσκοι αρχίζουν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, σε οριζόντιο επίπεδο. Μετά από χρόνο t_1 η απόσταση των c.m. των δίσκων:



α. μειώνεται **β.** αυξάνεται **γ.** παραμένει σταθερή.

Λύση

Έστω α_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας για ένα σώμα κυκλικής διατομής, με ροπή αδράνειας ως το κέντρο του I, ακτίνας R και μάζας m, το οποίο κυλίεται χωρίς ολίσθηση.



Έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $F - T = m\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T = \frac{I}{R}\cdot\frac{\alpha_{cm}}{R}$ ή $T = \frac{I\alpha_{cm}}{R^2}$ (2)

Από (1) + (2): $F = \alpha_{cm}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)$ ή $\alpha_{cm} = \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}}$ ή $\alpha_{cm} = \frac{FR^2}{mR^2 + I}$ (3)

Όμως: $I_{(\Delta 1)} > I_{(\Delta 2)}$ (4)

επειδή ο κούφιος δίσκος έχει συγκεντρωμένη τη μάζα του στην περιφέρεια.

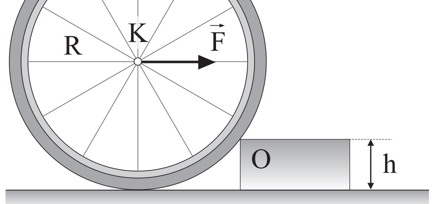
Από (3) - (4) : $\alpha_{cm_{(\Delta 1)}} < \alpha_{cm_{(\Delta 2)}}$

Άρα, η μεταξύ του απόσταση αυξάνεται.

Σωστό το (β).

4. Ο τροχός του σχήματος βάρους w = 150 N και ακτίνας R = = 0,5 m ισορροπεί στο λείο οριζόντιο δάπεδο.

Για ποιες τιμές της οριζόντιας δύναμης F που ασκείται στο c.m. του τροχού, ο τροχός θα υπερπηδήσει το σκαλοπάτι ύψους h = 0,2 m;



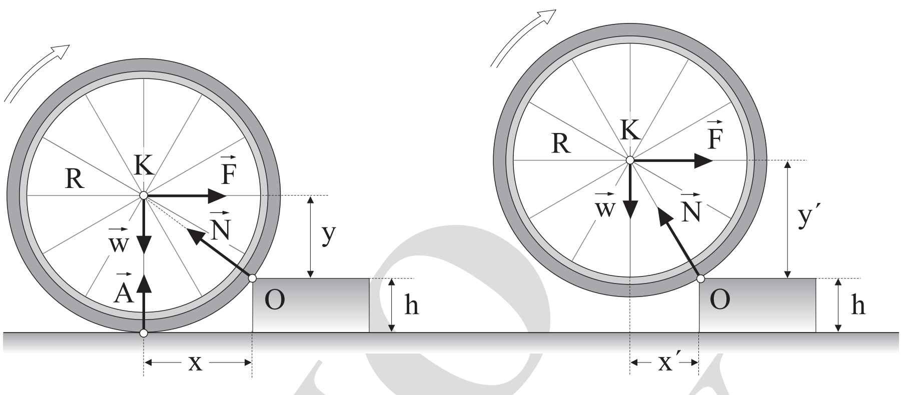
Λύση

Για να υπερπηδήσει ο τροχός το σκαλοπάτι θα στραφεί γύρω από την ακμή Ο. Όμως, για να συμβεί αυτό, θα πρέπει στην αρχική θέση (σχ. 1), η ροπή της $\vec{F}$ να είναι μεγαλύτερη της ροπής του βάρους $\vec{w}$, ως προς το ίδιο σημείο Ο. Άρα, στην αρχική θέση (1) πρέπει:

$$\tau_F > \tau_w \quad (1)$$

ενώ η αντίδραση του δαπέδου A = 0, αφού ο τροχός μόλις χάνει την επαφή του με το δάπεδο.

Αν στην αρχική θέση (1) η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το Ο είναι μεγαλύτερη από τη ροπή του $\vec{w}$ ως προς το ίδιο σημείο, αυτό θα ισχύει και σε κάθε άλλη θέση, γιατί καθώς ο τροχός ανεβαίνει, ο μοχλοβραχίονας y της $\vec{F}$ από το Ο μεγαλώνει, ενώ ο μοχλοβραχίονας x του $\vec{w}$ από το Ο μικραίνει (βλ. σχ. (2)), όπου $y' > y$ και $x' < x$.



(Σχήμα 1) **(Σχήμα 2)**

Από (1) έχουμε:
$$F \cdot y > w \cdot x \quad \text{ή} \quad F > w\frac{x}{y} \tag{2}$$

Από το σχήμα (1):
$$y = R - h \tag{3}$$

και $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ ή $x = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{R^2 - R^2 - h^2 + 2Rh}$ ή

$$x = \sqrt{h(2R-h)} \tag{4}$$

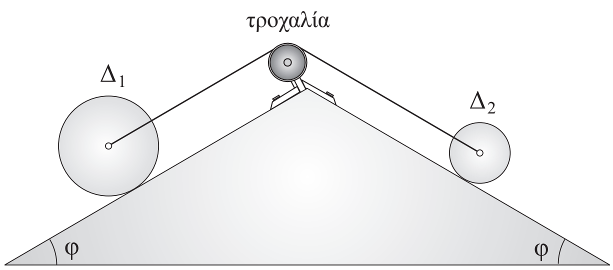
Από (2) - (3) - (4):
$$\mathbf{F > w\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην (5), έχουμε:

$$F > 150\frac{\sqrt{0,2-0,8}}{0,3} \quad \text{ή} \quad F > 150\frac{0,4}{0,3} \quad \text{ή} \quad \mathbf{F > 200\ N}$$

Από την (5) παρατηρούμε ότι αν $h \to R$ τότε $F \to \infty$, δηλαδή δεν μπορεί ο τροχός να υπερπηδήσει το σκαλοπάτι.

38. Οι ομογενείς δίσκοι Δ_1 και Δ_2 του διπλανού σχήματος μπορούν να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν πάνω στα εκτεταμένα κεκλιμένα επίπεδα, ενώ συγκρατούνται αρχικά ακίνητοι με το νήμα τεντωμένο. Οι δίσκοι Δ_1, Δ_2 έχουν μάζες $m_1 = 8$ kg, $m_2 = 2$ kg και ακτίνες $R_1 = 0{,}2$ m, $R_2 = 0{,}1$ m αντίστοιχα, ενώ είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό.



Η τροχαλία είναι αβαρής, ενώ το αβαρές και μη εκτατό (δηλαδή σταθερού μήκους) νήμα περνά από τα κέντρα μάζας (c.m.) των δίσκων. Την $t = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί, έτσι ώστε ο δίσκος Δ_1 να κατεβαίνει (κινείται προς τα κάτω), ενώ οι δύο δίσκοι κάνουν καθαρή κύλιση, δηλαδή κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Να βρείτε:

α. το μέτρο της επιτάχυνσης των κέντρων μάζας (c.m.) των δίσκων.

β. το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης κάθε δίσκου και το μέτρο της τάσης του νήματος.

γ. Όταν ο δίσκος Δ_1 έχει εκτελέσει $\dfrac{10}{\pi}$ περιστροφές, πόσες περιστροφές έχει εκτελέσει ο δίσκος Δ_2 και ποιο το διάστημα που έχει διανύσει το κέντρο μάζας κάθε δίσκου στον παραπάνω χρόνο;

δ. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ επιπέδου-δίσκων είναι $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{30}$, οι δίσκοι θα κυλούσαν χωρίς να ολισθαίνουν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Δίνονται:

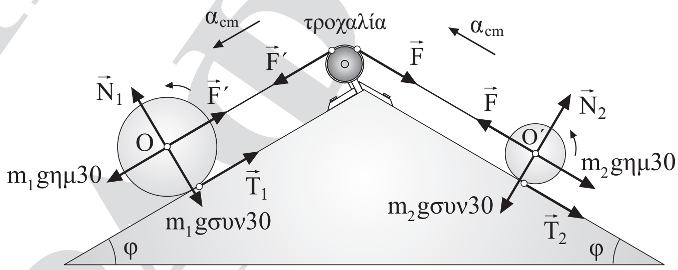
Για τον Δ_1: $I_{1_{cm}} = \dfrac{1}{2} m_1 R_1^2$, για τον Δ_2: $I_{2_{cm}} = \dfrac{1}{2} m_2 R_2^2$, $\varphi = 30^o$ και $g = 10\,m/s^2$

Λύση

Η τροχαλία είναι αβαρής, δηλαδή: $m_{τροχ} = 0$, άρα: $F = F'$

Πράγματι: $(F' - F)\,R_{τροχ} = I_{τροχ}\,\alpha_{γων} = \Sigma m_i R_1^2 \cdot \alpha_{γων} = 0$, $F = F'$

Επειδή το τεντωμένο νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, τα κέντρα μάζας των δίσκων, κάθε σημείο του νήματος, καθώς και τα σημεία της περιμέτρου της τροχαλίας έχουν κάθε χρονική στιγμή ταχύτητα και επιτάχυνση ίδιου μέτρου.



Αφού και οι 2 δίσκοι κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \theta \cdot R\,,\quad \upsilon_{cm} = \omega \cdot R \quad και \quad \alpha_{cm} = \alpha_{γων} \cdot R$$

α. Για το δίσκο (Δ_1):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m_1 \alpha_{cm}$ ή $m_1 g ημ30 - F - T_1 = m_1 \alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_{(O)} = I_0\,\alpha_{γων(1)}$ ή $T_1 R_1 = \dfrac{1}{2} m_1 R_1^2 \dfrac{\alpha_{cm}}{R_1} \Rightarrow T_1 = \dfrac{1}{2} m_1 \alpha_{cm}$ (2)

Για το δίσκο (Δ_2):

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F = m_2 \alpha_{cm}$ ή $F - m_2 g ημ30 - T_2 = m_2 \alpha_{cm}$ (3)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau_{(O')} = I'_0\,\alpha_{γων(2)}$ ή $T_2 R_2 = \dfrac{1}{2} m_2 R_2^2 \dfrac{\alpha_{cm}}{R_2} \Rightarrow T_2 = \dfrac{1}{2} m_2 \alpha_{cm}$ (4)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (3):

$$m_1 g ημ30 - T_1 - m_2 g ημ30 - T_2 = \alpha_{cm}(m_1 + m_2) \quad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (4), (5) έχουμε:

$$m_1 g\eta\mu 30 - m_2 g\eta\mu 30 = \alpha_{cm}\left(m_1 + m_2 + \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\right) \quad ή$$

$$\alpha_{cm} = \frac{(m_1 - m_2)g\eta\mu 30}{\dfrac{3m_1 + 3m_2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{cm} = \frac{2g(m_1 - m_2)\eta\mu 30}{3(m_1 + m_2)} \quad ή \quad \boldsymbol{\alpha_{cm} = 2\ m/s^2}$$

β. Για το δίσκο (Δ_1): $\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R_1}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 10\ rad/s^2$

Για το δίσκο (Δ_2): $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R_2}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = 20\ rad/s^2$

Από την (3) έχουμε: $F = m_2\alpha_{cm} + m_2 g\eta\mu 30 + T_2$ ή, εξαιτίας της (4),

$$F = m_2\alpha_{cm} + m_2 g\eta\mu 30 + \frac{m_2}{2}\alpha_{cm} \quad ή \quad F = 16\ N$$

γ. Για το δίσκο (Δ_1): $N_1 = \dfrac{\theta_1}{2\pi}$ ή $\dfrac{10}{\pi} = \dfrac{\theta_1}{2\pi} \Rightarrow \theta_1 = 20\ rad$

Όμως: $\theta_1 = \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2\theta_1}{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}}}$ ή $\mathbf{t = 2\ s}$

Για το δίσκο (Δ_2): $\theta_2 = \dfrac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} t^2 \Rightarrow \theta_2 = 40\ rad$

Άρα:

$$N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} \quad ή \quad N_2 = \frac{20}{2\pi} \text{ περιστροφές}$$

Για τα κέντρα μάζας των δίσκων ισχύει:

$$S_1 = S_2 = S \quad ή \quad S = \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2 \quad ή \quad S = 4\ m$$

Σχόλιο:

Αν δεν χρειαζόταν να βρούμε το χρόνο t μπορούσαμε να βρούμε το N_2 ως εξής:

$$N_1 = \frac{S}{2\pi R_1} \quad και \quad N_2 = \frac{S}{2\pi R_2}$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad ή \quad N_2 = N_1\frac{R_1}{R_2} \Rightarrow N_2 = N_1\frac{0,2}{0,1} \quad ή \quad N_2 = 2N_1 = \frac{20}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

δ. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ επιπέδων - δίσκων είναι ο ίδιος και για τους 2 δίσκους, αφού είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό.

(Ο μ εξαρτάται <u>μόνο</u> από τα υλικά των επιφανειών που έρχονται σε επαφή).

Υπολογίζουμε την τιμή της $T_{ολίσθησης}$ και την τιμή της τριβής Τ, που προκύπτει από το πρόβλημα, η οποία πρέπει να είναι στατική, δηλαδή: $T \le T_{ολισθ.}$ (Ι)

Ισχύει: $T_{ολισθ.} = \mu m g συνφ$, όπου $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{30}$ και m η μάζα του ενός δίσκου.

$$T_{ολισθ.} = \frac{\sqrt{3}}{30} m \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ή \quad \mathbf{T_{ολισθ.} = \frac{m}{2}} \tag{6}$$

Όμως, από το (α) ερώτημα και με τη βοήθεια των σχέσεων (2) - (4), καταλήγουμε ότι:

$$T = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \quad ή \quad \mathbf{T = m} \tag{7}$$

αφού $\alpha_{cm} = 2\ m/s^2$

Επειδή $\mathbf{T > T_{ολισθ.}}$, δηλαδή δεν ισχύει η σχέση (Ι), και οι δύο δίσκοι θα ολισθήσουν.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι τόσο η $T_{ολισθ.}$ όσο και η $T_{στ.}$ σχέσεις (6) (7) εξαρτώνται μόνο από τη μάζα m του κάθε κυλίνδρου.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού ο συντελεστής τριβής μ είναι ο ίδιος και για τους 2 δίσκους, καθώς η γωνία φ και το μέτρο της α_{cm}.

2ος τρόπος

Έστω μ_{min} ο ελάχιστος συντελεστής τριβής για να μην έχουμε ολίσθηση.

Ισχύει: $T_{στ.} \le T_{ολισθ.}$ ή $T_{στ.} \le \mu N$ ή $T_{στ.} \le \mu m g συνφ$ ή $\mu \ge \dfrac{T_{στ.}}{m g συνφ}$

Όμως από ερώτημα (α): $T_{στ.} = \dfrac{m}{2}\alpha_{cm}$

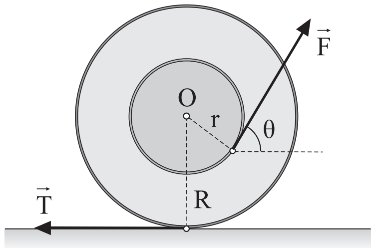
Άρα, έχουμε: $\mu \ge \dfrac{\frac{m}{2}\alpha_{cm}}{m g συνφ}$ ή $\mu \ge \dfrac{\alpha_{cm}}{2 g συνφ}$

Αντικαθιστώντας: $\mu \ge \dfrac{2}{2g\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \mu \ge \dfrac{2}{10\sqrt{3}} \Rightarrow \mu \ge \dfrac{2\sqrt{3}}{30}$ ή

$\mu_{min} = \dfrac{2\sqrt{3}}{30}$ και $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{30}$ από την εκφώνηση του προβλήματος

Επειδή $\mu_{min} > \mu$, έχουμε ολίσθηση των δίσκων.

44. **Το στερεό αρχικά ηρεμεί. Την $t = 0$ ασκούμε δύναμη σταθερού μέτρου, έτσι ώστε η διεύθυνσή της να σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία θ, για την οποία $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.**



Αν $R = 2r$, να βρείτε τις τιμές της γωνίας θ, για τις οποίες το στερεό:

α. κυλίεται προς τα δεξιά.

β. κυλίεται προς τα αριστερά.

γ. παραμένει ακίνητο.

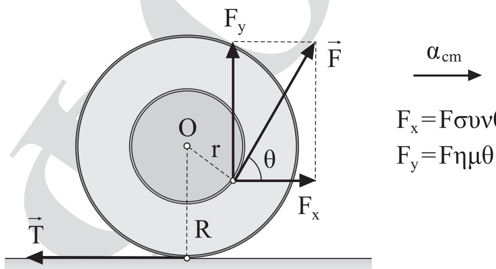
Η στατική τριβή είναι τέτοια ώστε το στερεό να μην ολισθαίνει. Δίνεται η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς το Ο, Ι.

Λύση

1ος τρόπος

Έστω ότι το στερεό κυλίεται προς τα δεξιά.

Ισχύουν:



$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \quad \text{ή} \quad F_x - T = m\alpha_{cm} \quad \text{ή}$$

$$F\sigma\upsilon\nu\theta - T = m\alpha_{cm} \qquad (1)$$

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_0\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \text{ή} \quad T \cdot R - F \cdot r = I_0\frac{\alpha_{cm}}{R} \qquad (2)$$

Η (1) γράφεται:

$$R \cdot F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T \cdot R = Rm\alpha_{cm} \qquad (1΄)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (1΄) έχουμε:

$$R \cdot F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - F \cdot r = \alpha_{cm}\left(\frac{I_0}{R} + mR\right) \quad \text{ή} \quad F \cdot R \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{r}{R}\right) = \alpha_{cm}\frac{I_0 + mR^2}{R} \quad \text{ή}$$

$$\boldsymbol{\alpha_{cm} = \frac{F \cdot R^2 \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{r}{R}\right)}{I_0 + mR^2}} \qquad (3)$$

- Επειδή το στερεό κυλίεται προς τα δεξιά $\alpha_{cm} > 0$, δηλαδή:

$$\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{r}{R} > 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{r}{R} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\theta < 60^o}$$

- Αν $\boldsymbol{\theta > 60^o}$, $\sigma\upsilon\nu\theta < \frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{r}{R} < 0$ ή, λόγω της (3) $\alpha_{cm} < 0$ και το στερεό κυλίεται προς τα αριστερά.
- Αν $\boldsymbol{\theta = 60^o}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{r}{R}$ ή $\alpha_{cm} = 0$, δηλαδή το στερεό παραμένει ακίνητο, αφού αποκλείεται η ολίσθηση.

2ος τρόπος

Η λύση γίνεται πιο σύντομη αν δουλέψουμε με το στιγμιαίο άξονα περιστροφής, ο οποίος διέρχεται από το σημείο επαφής στερεού - δαπέδου, έστω Κ. Θυμίζουμε ότι η σύνθετη κίνηση του στερεού

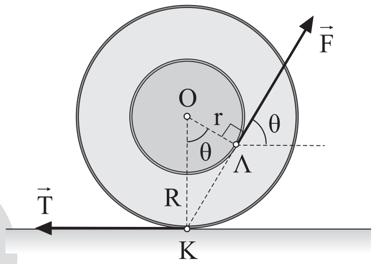
ως προς το Ο, μπορεί να θεωρηθεί καθαρά στροφική γύρω από το Κ.

1. Αν ο φορέας της $\vec{F}$ περνά από το Κ, τότε $\tau_F = 0$, άρα: $\boldsymbol{\Sigma\tau_{(K)} = 0}$, αφού $\tau_T = \tau_{mg} = \tau_N = 0$ (οι φορείς τους περνάνε από το Κ).

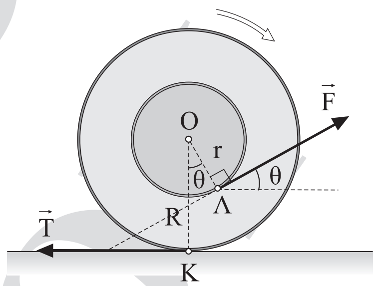
Άρα το στερεό δεν περιστρέφεται.

Από το τρίγωνο ΟΚΛ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{O\Lambda}{OK} = \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{2}$,

Δηλαδή: $\theta = 60^o$



2. Αν η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το Κ είναι δεξιόστροφη, τότε το στερεό κυλίεται προς τα δεξιά και $\theta < 60^o$.

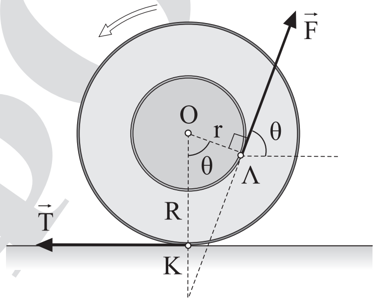


3. Αν η ροπή της $\vec{F}$ ως προς το Κ είναι αριστερόστροφη, τότε το στερεό κυλίεται προς τα αριστερά και $\theta > 60^o$.

Τέλος, παρατηρείστε ότι η φορά κύλισης χωρίς ολίσθηση του στερεού εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ, αρκεί:

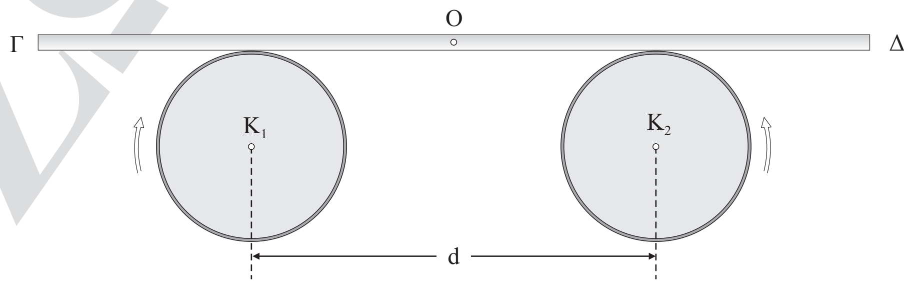
α. το μέτρο της $\vec{F}$ να είναι σταθερό.

β. ο λόγος $\dfrac{r}{R}$ επίσης να είναι σταθερός.



49. Οι άξονες δύο όμοιων κυλίνδρων K_1 και K_2 είναι παράλληλοι, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση $d = 2{,}5\,m$. Αφήνουμε μία ισοπαχή ομογενή σανίδα ΓΔ μάζας $M = 16\,kg$ πάνω στους κυλίνδρους έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται πάνω από το μέσον της απόστασης K_1K_2 και με κατάλληλο μηχανισμό βάζουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, με γωνιακή ταχύτητα ω, ίδιου μέτρου όπως δείχνει το σχήμα. Ασκούμε στο άκρο Γ της σανίδας σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 16\,N$ με κατεύθυνση προς το άλλο άκρο Δ.

Όταν το μέσο Ο της σανίδας διανύσει απόσταση $S = 2\,cm$, η δύναμη F καταργείται.



Α.1. Να αποδείξετε ότι η σανίδα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.) και να υπολογίσετε την περιοδό της.

Α.2. Ποιο το πλάτος Α της α.α.τ. που εκτελεί η σανίδα.

Α.3. Να γίνουν σε κοινό διάγραμμα, οι γραφικές παραστάσεις των τιμών των δυνάμεων τριβής T_1, T_2 σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x του κέντρου μάζας της σανίδας, όσο αυτή εκτελεί α.α.τ. πλάτους Α.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης της σανίδας με τους κυλίνδρους είναι $\mu = 0{,}5$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Β. Επαναφέρουμε τη σανίδα στην αρχική θέση ισορροπίας της. Κάποια χρονική στιγμή, τοποθετούμε πάνω στη σανίδα ένα ομογενές σώμα Σ μάζας $m = 9$ kg, έτσι ώστε το κέντρο μάζας του να ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της σανίδας. Απομακρύνουμε το σύστημα σα-νίδα-σώμα Σ, χωρίς το Σ να γλιστρά κατά x και το αφήνουμε ελεύθερο. Το σύστημα εκτελεί α.α.τ.

Β.1. Να βρείτε τις σταθερές επαναφοράς $D_{\sigma\alpha\nu}$, D_Σ της σανίδας και του σώματος Σ, αντί-στοιχα.

Β.2. Ποια η σταθερά επαναφοράς του συστήματος;

Β.3. Ποιο το μέγιστο επιτρεπόμενο πλάτος ταλάντωσης της σανίδας, έτσι ώστε το σώμα Σ να μην ολισθαίνει ως προς αυτήν;

Δίνεται συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα Σ και τη σανίδα $\mu_1 = 0{,}08$.

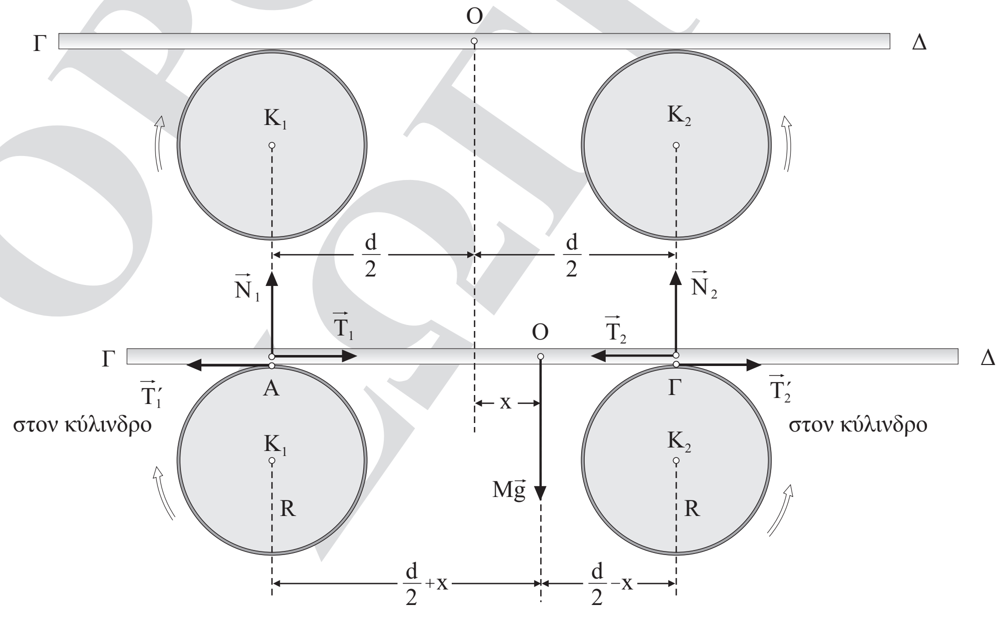
Λύση

Α.1. Στη σανίδα ασκούνται:

α. το βάρος της $M\vec{g}$

β. οι αντιδράσεις $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ από τους κυλίνδρους και

γ. οι δυνάμεις τριβής $\vec{T}_1, \vec{T}_2$, με μέτρα $T_1 = \mu N_1$ και $T_2 = \mu N_2$ αντίστοιχα.



Σχ. (1)

Σχ. (2)

Στην τυχαία απομάκρυνση $\vec{x}$, με θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης, (σχ. (2)), έχουμε:

$$\Sigma F_x = T_1 - T_2 = \mu N_1 - \mu N_2 \quad \text{ή} \quad \Sigma F_x = \mu(N_1 - N_2) \qquad (1)$$

Επειδή η σανίδα δεν στρέφεται, ισχύουν:

— $\Sigma\tau_{(A)} = 0 \;\Rightarrow\; -Mg\left(\frac{d}{2}+x\right)+N_2 d = 0$ ή $N_2 = \dfrac{Mg\left(\frac{d}{2}+x\right)}{d}$ (2)

— $\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \;\Rightarrow\; Mg\left(\frac{d}{2}-x\right)-N_1 d = 0$ ή $N_1 = \dfrac{Mg\left(\frac{d}{2}-x\right)}{d}$ (3)

Αντικαθιστούμε στην (1), τις (2), (3):

$$\Sigma F_x = \mu\left[Mg\frac{\left(\frac{d}{2}-x\right)}{d} - Mg\frac{\left(\frac{d}{2}+x\right)}{d}\right] = \frac{\mu Mg}{d}\left(\frac{d}{2}-x-\frac{d}{2}-x\right) = \frac{\mu Mg}{d}(-2x) \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{\Sigma F_x = -\frac{2\mu Mg}{d}x} \qquad (4)$$

Επειδή $\dfrac{2\mu Mg}{d}$ = σταθερά, η (4) δείχνει ότι η σανίδα κάνει α.α.τ. με:

$$D = \frac{2\mu Mg}{d} \qquad (5)$$

Ισχύει: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{D}}$, ή λόγω της (5), $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{\frac{2\mu Mg}{d}}}$ ή $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{d}{2\mu g}}}$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2,5}{2\cdot 0,5\cdot 10}} = 2\pi\sqrt{0,25} = 2\pi\cdot 0,5 \quad \text{ή} \quad \mathbf{T = \pi\, s}$$

Α.2. Το έργο της εξωτερικής δύναμης F, είναι η ενέργεια της ταλάντωσης.
Ισχύει:

$$W_F = E \quad \text{ή} \quad FS = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad A = \sqrt{\frac{2FS}{D}} \quad \text{ή, λόγω της (5):}$$

$$A = \sqrt{\frac{2FS}{\frac{2\mu Mg}{d}}} = \sqrt{\frac{FSd}{\mu Mg}}, \text{ με αντικατάσταση, } A = \sqrt{\frac{16\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 2,5}{0,5\cdot 16\cdot 10}} = \sqrt{\frac{5\cdot 10^{-2}}{5}} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{A = 0,1\, m}$$

Α.3. Ισχύουν: $T_1 = \mu N_1$ και $T_2 = \mu N_2$

Όμως, από Α.1. ερώτημα και από τις σχέσεις (3), (2) έχουμε:

$$N_1 = \frac{Mg\left(\frac{d}{2}-x\right)}{d} \quad \text{και} \quad N_2 = \frac{Mg\left(\frac{d}{2}+x\right)}{d}$$

Αντικαθιστώντας:

$$T_1 = \frac{\mu Mg}{d}\left(\frac{d}{2}-x\right) \quad \text{και} \quad T_2 = \frac{\mu Mg}{d}\left(\frac{d}{2}+x\right)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές έχουμε:

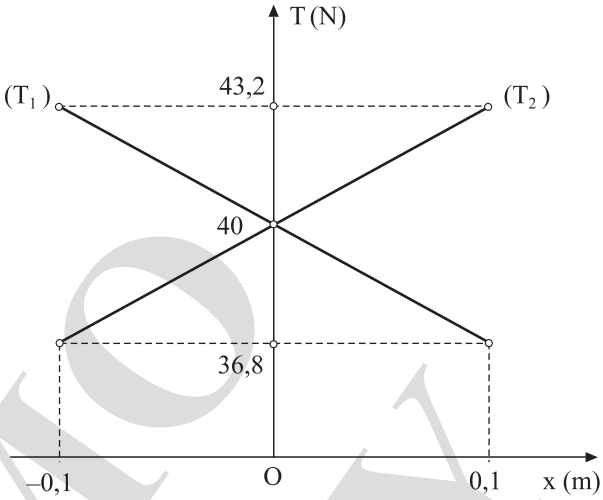
$$T_1 = 32(1,25 - x) \qquad (6)$$

$$\text{και} \quad T_2 = 32(1,25 + x) \qquad (7)$$

με $-A \le x \le A$ ή

$(0,1 \le x \le 0,1)$ (S.I.)

Οι γραφικές παραστάσεις των (6, 7), σε κοινό διάγραμμα, φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Β.1. Από την ερώτηση Α.1, υπολογίσαμε την περίοδο ταλάντωσης της σανίδας $T = \frac{d}{2\mu g}$, ανεξάρτητη της μάζας, είτε της σανίδας είτε του σώματος Σ, αφού αυτό βρίσκεται στο κέντρο μάζας Ο της σανίδας.

Άρα: $T_{\pi\rho\iota\nu} = T_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = T = \pi\ s$ και $\omega_{\pi\rho\iota\nu} = \omega_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = \omega = \frac{2\pi}{T}$ ή $\omega = 2\ rad/s$

Για τις σταθερές επαναφοράς της σανίδας και του σώματος Σ, έχουμε αντίστοιχα:

$$D_{\sigma\alpha\nu} = M\omega^2 = 64\ N/m, \qquad D_\Sigma = m\omega^2 = 36\ N/m$$

Β.2. Ισχύει: $D_{\sigma\upsilon\sigma\tau.(\mu\varepsilon\tau\alpha)} = (M+m)\omega^2 = 100\ N/m$

Σχόλιο:

Αφού η γωνιακή συχνότητα ω δεν αλλάζει, ενώ αλλάζει η μάζα m, τότε από τη σχέση $D = m\omega^2$ θα αλλάζει η D, δηλαδή: $D_{\sigma\upsilon\sigma\tau.(\pi\rho\iota\nu)} \neq D_{\sigma\upsilon\sigma\tau.(\mu\varepsilon\tau\alpha)}$

Στη σχέση $D = m\omega^2$, όταν αλλάζει η μάζα m, τότε αλλάζουν είτε η ω είτε η D, ανάλογα με το πρόβλημα.

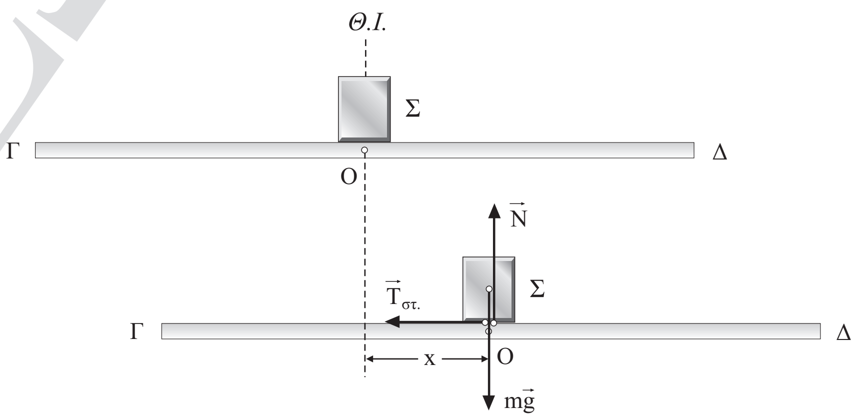
Β.3. Για το σώμα Σ, το οποίο συμμετέχει στην ταλάντωση του συστήματος, το ρόλο της δύναμης επαναφοράς παίζει η στατική τριβή $T_{\sigma\tau}$. Άρα, το μέτρο της δύναμης επαναφοράς, στην τυχαία θέση x, είναι:

$$F_{\varepsilon\pi} = T_{\sigma\tau} = D_\Sigma \cdot x \quad \text{ή} \quad T_{\sigma\tau} = m\omega^2 \cdot A \qquad (8)$$

Επειδή το Σ δεν ολισθαίνει ως προς τη σανίδα, ισχύει:

$$T_{\sigma\tau} \le T_{o\lambda} \quad \text{ή}$$

$$T_{\sigma\tau} \le \mu_1 mg \qquad (9)$$



Από (8, 9):

$$m\omega^2 A \le \mu_1 mg \quad \text{ή}$$

$$A \le \frac{\mu_1 g}{\omega^2} \quad \text{ή} \quad \mathbf{A_{max} = \frac{\mu_1 g}{\omega^2}}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $A_{max} = \frac{0,08 \cdot 10}{4}$ ή $A_{max} = 0,2\ m$

50. Λεία οριζόντια σανίδα μήκους $L = 3\ m$ και μάζας $M = 0{,}4\ Kg$ αρθρώνεται στο άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο. Σε απόστα-ση $d = 1\ m$ από τον τοίχο, η σα-νίδα στηρίζεται ώστε να διατη-ρείται οριζόντια. Ιδανικό αβα-ρές ελατήριο σταθεράς $K = 100\ N/m$ συνδέεται με το ένα άκρο του στον τοίχο και το άλλο σε σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1\ Kg$. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, ο άξονάς του είναι οριζόντιος και διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος $Σ_1$.

Το κέντρο μάζας του σώματος $Σ_1$ βρίσκεται σε απόσταση d από τον τοίχο. Στη συνέχεια, ασκούμε στο σώμα $Σ_1$ σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40\ N$ με κατεύθυνση προς το άλλο άκρο Γ της σανίδας. Όταν το σώμα $Σ_1$ διανύσει απόσταση $s = 5\ cm$, η δύναμη παύει να ασκείται στο σώμα και, στη συνέχεια, το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

1. Να υπολογίσετε το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα $Σ_1$.

2. Να εκφράσετε το μέτρο της δύναμης F_A που δέχεται η σανίδα από τον τοίχο σε συνάρτηση με την απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση. Για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης να χρησιμοποιηθεί χαρτί μιλιμετρέ.

Κατά μήκος της σανίδας από το άκρο Γ κινείται σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 1\ Kg$ με ταχύτητα $υ_2 = 2\sqrt{3}\ m/s$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, όταν η απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$ είναι x_1, όπου $x_1 \geq 0$. Το σώμα $Σ_1$ μετά την κρούση ταλαντώνεται με το μέγιστο δυνατό πλάτος.

3. Να βρείτε την απομάκρυνση x_1.

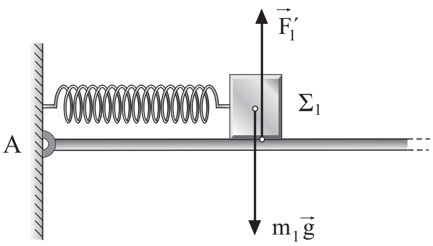
4. Να βρείτε μετά από πόσο χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης τα δύο σώματα θα συγκρουστούν για δεύτερη φορά.

Θεωρούμε θετική τη φορά της απομάκρυνσης προς το Γ. Τριβές στην άρθρωση και στο υποστήριγμα δεν υπάρχουν.

Δίνεται: επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$

[Επαναληπτικές Πανελλήνιες Εξετάσεις 2011]

Λύση



1. Ισχύει: $E_T = W_F = F \cdot S = 2\ J$

Όμως: $E_T = \dfrac{1}{2}KA^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A = 0{,}2\ m}$

2. Από ισορροπία του $(Σ_1)$ στον κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$F_1' = m_1 g = 10\ N$$

όπου $\vec{F}_1'$ η αντίδραση από τη σανίδα.

Το $(Σ_1)$ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση, με θέση ισορροπίας το σημείο Ο.

(Σημείο στήριξης της σανίδας).

Έστω x η απομάκρυνση του $(Σ_1)$ από το Ο (βλ. σχ. 1).

Στη σανίδα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

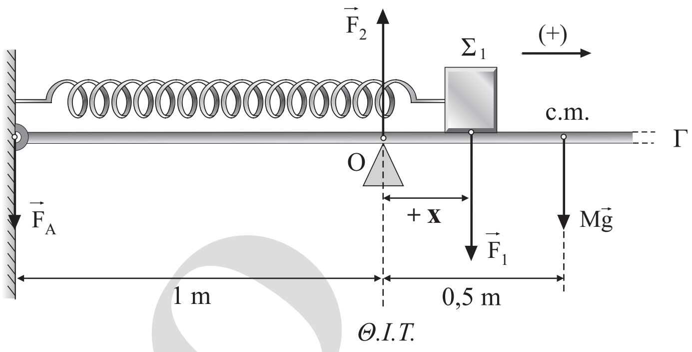
– Το βάρος της $M\vec{g}$ στο μέσον της.

– Η δύναμη $\vec{F}_2$ από το στήριγμα.

– Η δράση από το (Σ_1), $\vec{F}_1$ με μέτρο $F_1 = F_1' = 10\ \text{N}$

– Η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση Α.

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και $M\vec{g}$ είναι κατακόρυφες και η $\vec{F}_A$ είναι κατακόρυφη, με φορά έστω προς τα κάτω.



(Σχ. 1)

Η σανίδα ισορροπεί, άρα:

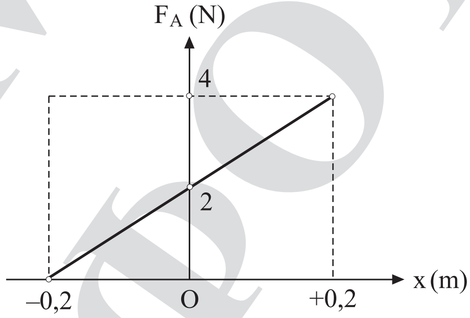
$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_A \cdot 1 - F_1 \cdot x - Mg \cdot 0,5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_A = F_1 \cdot x + Mg \cdot 0,5 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{F_A = 10x + 2} \ \text{(S.I.)}$$

$$\text{με} \quad -0,2 \leq x \leq 0,2 \quad \text{(S.I.)}$$



(Ι)

Η γραφική παράσταση της $F_A = f(x)$ φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα.

Σχόλια

– Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν θεωρούσαμε το (Σ_1) σε τυχαία θέση, όχι θετική (+x), αλλά αρνητική (–x).

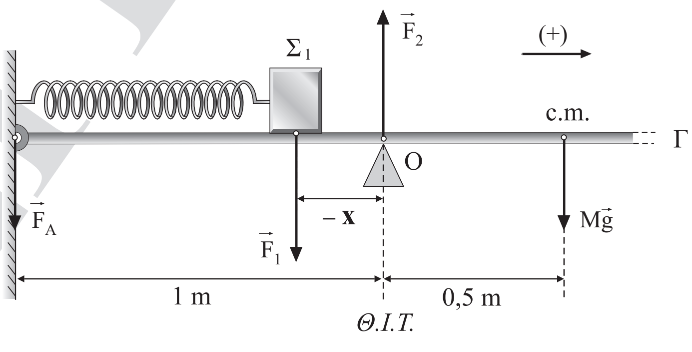
Πράγματι:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_A \cdot 1 + F_1 \cdot x - Mg \cdot 0,5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$F_A = -F_1 \cdot x + Mg \cdot 0,5 \quad \Rightarrow$$

$$F_A = -10x + 2$$



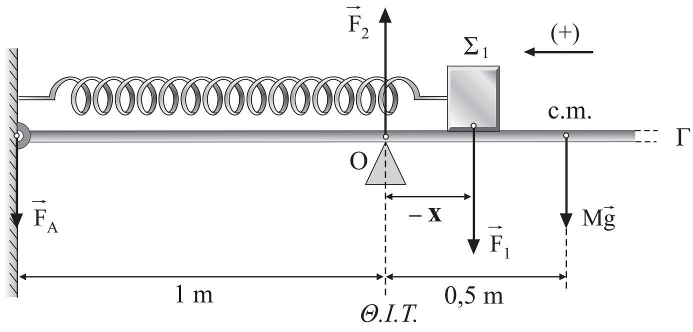
όμως $x < 0$, άρα:

$\mathbf{F_A = 10x + 2}$ (S.I.) όπως πριν.

– Αν τώρα δινόταν **θετική φορά** προς τα αριστερά, (βλ. σχ. 2), τότε:

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \quad \text{ή}$$

$$F_A \cdot 1 - F_1 \cdot x - Mg \cdot 0,5 = 0 \quad \text{ή}$$



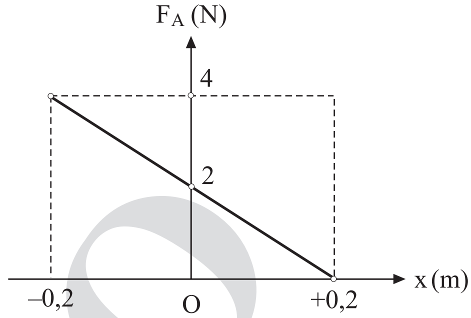
(Σχ. 2)

$$F_A = 10x + 2$$

όμως $\mathbf{x < 0}$,

άρα: $\mathbf{F_A = -10x + 2}$ (S.I.)

$-0{,}2 \le x \le 0{,}2$ (S.I.)



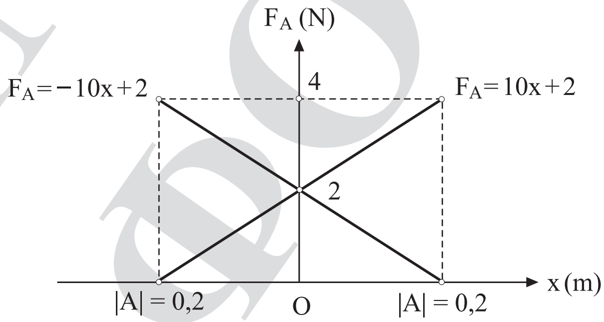
(II)

Η γραφική παράσταση της $F_A = f(x)$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Στην ίδια συνάρτηση $F_A = -10x + 2$ θα καταλήξουμε αν θεωρήσουμε την απομάκρυνση x θετική, $x > 0$. Προτρέπουμε τον αναγνώστη να αποδείξει την παραπάνω σχέση, σε αυτή την περίπτωση.

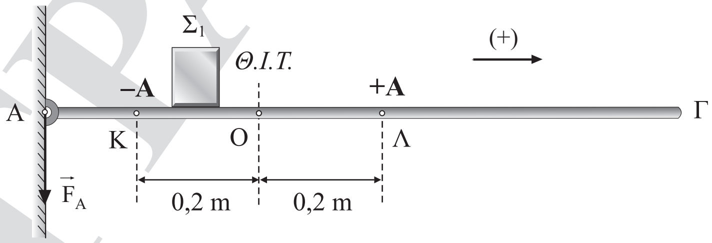
Η γραφική παράσταση (II) είναι η **συμμετρική** της γραφικής παράστασης (I), ως προς το μέτρο της $\vec{F}_A$, έτσι ώστε σε κάθε περίπτωση, οι χαρακτηριστικές τιμές του μέτρου της $\vec{F}_A$ να είναι (0, 2, 4) N.

Οι γραφικές παραστάσεις (I), (II) σε κοινό διάγραμμα φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Συνοψίζουμε:

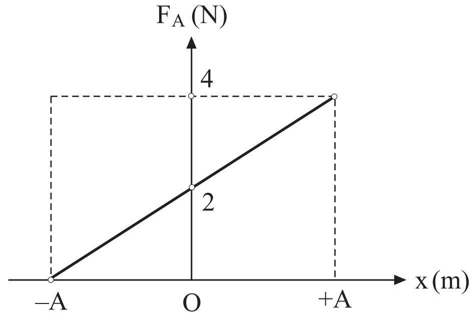
– Αν δοθεί θετική φορά προς τα δεξιά $\xrightarrow{+}$, ανεξάρτητα με την τυχαία θέση του Σ_1, $x > 0$ ή $x < 0$, ισχύει:



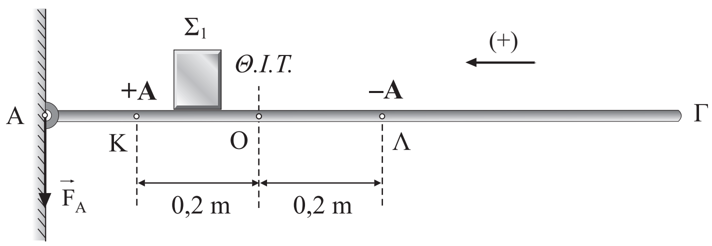
$\mathbf{F_A = 10x + 2}$ (S.I.)

$-0{,}2 \le x \le 0{,}2$ (S.I.)

Όσο το (Σ_1) κινείται από το σημείο Κ προς το σημείο Λ, το μέτρο της F_A αυξάνεται, ενώ αντίστοιχα για κίνηση από $\Lambda \rightarrow K$ το μέτρο της F_A μειώνεται.



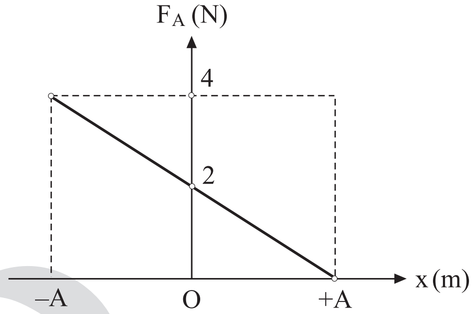
– Αν δοθεί θετική φορά προς τα αριστερά $\xleftarrow{+}$, ανεξάρτητα με την τυχαία θέση του (Σ_1), $x > 0$ ή $x < 0$, ισχύει:



$\mathbf{F_A = -10x + 2}$ (S.I.)

$-0{,}2 \le x \le 0{,}2$

Όπως και πριν, για κίνηση από το $K \rightarrow \Lambda$ το μέτρο της F_A αυξάνεται και το αντίστροφο, για κίνηση από το $\Lambda \rightarrow K$.



Παρατήρηση

Όσο το (Σ_1) κινείται από το Κ προς το Λ, η τιμή της F_A αυξάνεται, ενώ μειώνεται από όταν το (Σ_1) κινείται από το Λ στο Κ, γεγονός που συνάδει με τη λογική της Φυσικής.

Η αυθαίρετη επιλογή της θετικής φοράς δεν παίζει ρόλο "στη λογική" του θέματος, άρα οι γραφικές παραστάσεις (Ι) και (ΙΙ) είναι ισοδύναμες (Από μαθηματικής άποψης είναι συμμετρικές ως προς την F_A).

3. Η ενέργεια ταλάντωσης του (Σ_1) μετά την κρούση είναι $E_1 = \frac{1}{2}KA_1^2$ όπου A_1 το μέγιστο δυνατό πλάτος της γ.α.τ. Άρα, πρέπει και η E_1 να είναι μέγιστη. Όμως:

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

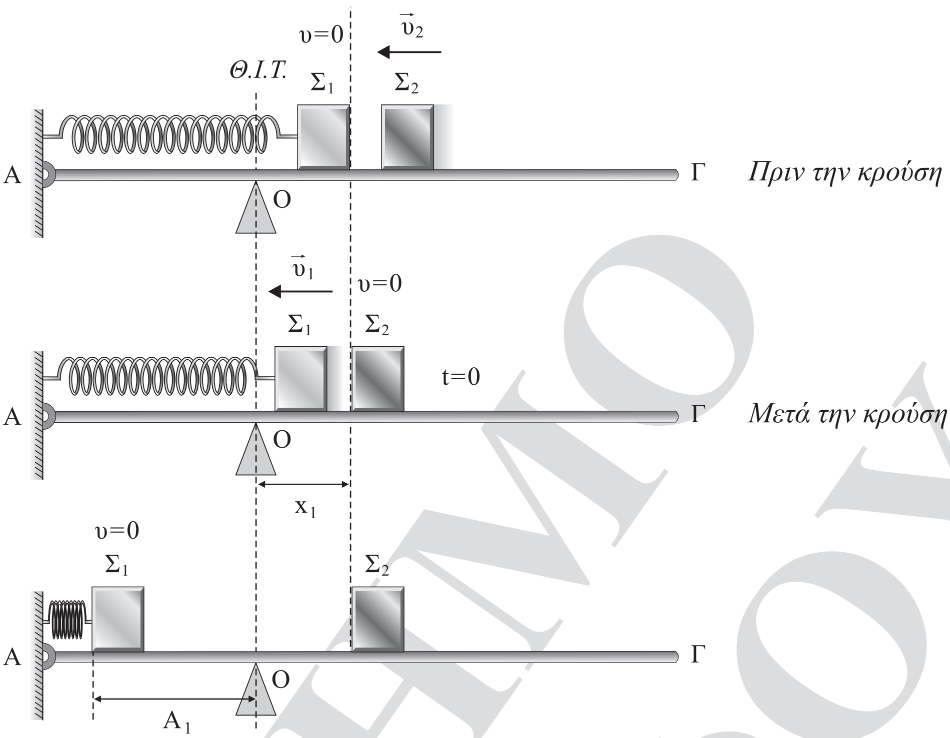
όπου υ_1 = η ταχύτητα του (Σ_1) αμέσως μετά την κρούση.

Επειδή έχουμε κεντρική ελαστική κρούση με ίσες μάζες ($m_1 = m_2 = 1$ kg), τα σώματα μετά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες, δηλαδή $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 2\sqrt{2}$ m/s .

Η E_1 γίνεται μέγιστη, όταν η απομάκρυνση x_1 του Σ_1 γίνει μέγιστη.

Άρα: $\mathbf{x_1 = A = 0,2\ m}$

4. Είδαμε πριν ότι αμέσως μετά την κρούση τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Η κρούση όμως γίνεται στη θέση $x_1 = 0,2 = +A$, έτσι ώστε η ταχύτητα του (Σ_1) πριν την κρούση να είναι μηδέν. Άρα, μετά την κρούση το (Σ_1) κινείται προς το σημείο Α (αριστερά), ενώ το (Σ_2) παραμένει ακίνητο στη θέση x_1 = 0,2 m. (βλ. σχ. (3)).

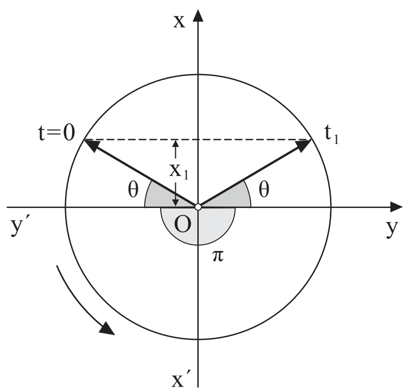


(Σχ. 3)

Για τη νέα ταλάντωση του $(Σ_1)$ μετά την κρούση έχουμε:

$$\frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1^2 \qquad (1)$$

όπου A_1 το μέγιστο δυνατό πλάτος της γ.α.τ.



Από (1): $100A_1^2 = 4 + 12$ ή $A_1 = 0,4\,\text{m}$

Έστω t_1 ο χρόνος μετά την t = 0 (στιγμή 1ης κρούσης), ώστε τα σώματα να συγκρουστούν για 2η φορά.

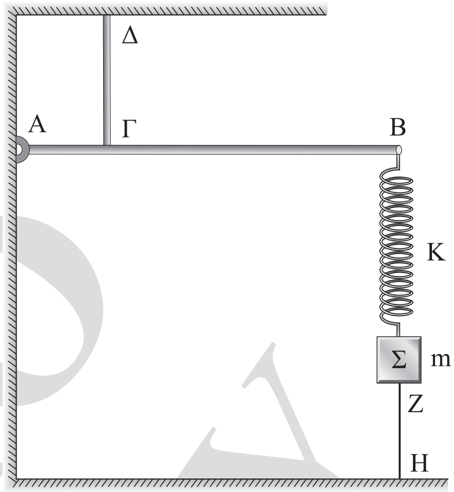
Από τον κύκλο αναφοράς έχουμε:

$$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10\,\text{rad/s}, \qquad ημθ = \frac{x_1}{A} = \frac{0,2}{0,4} = \frac{1}{2}$$

Άρα: $θ = \frac{π}{6}\,\text{rad}$

Ισχύει: $φ = ωt_1$ ή $θ + π + θ = 10t_1$ ή $\frac{π}{3} + π = 10t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{4π}{30}$ ή $\mathbf{t_1 = \frac{2π}{15}\,s}$

54. Η δοκός ΑΒ είναι ομογενής με μάζα $M = 2\ Kg$ και μήκος $(AB) = 4\ m$. Η ράβδος ΓΔ είναι αβαρής, ενώ το σώμα Σ έχει μάζα $m = 0{,}5\ kg$.



Η δοκός ΑΒ και το σώμα Σ ισορροπούν με τη θέση της δοκού να είναι οριζόντια, ενώ το αβαρές και μη εκτατό νήμα ΖΗ, είναι τεντωμένο.

Στη θέση αυτή, το ιδανικό ελατήριο με $K = 50\ N/m$ έχει επιμηκυνθεί κατά $y_1 = 0{,}2\ m$.

α. Ποια η τάση του νήματος (ΖΗ), ποια η δύναμη F_1 που ασκεί η ράβδος ΔΓ στη δοκό ΑΒ, καθώς και ποια δύναμη ασκείται στη δοκό από την άρθρωση στο Α;

β. Την $t = 0$ κόβουμε το νήμα (ΖΗ). Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του σώματος Σ και να βρεθούν τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη δοκό τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{10}s$.

γ. Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ταλαντωτή, την $t_1 = \frac{\pi}{10}s$;

δ. Να γίνει η γραφική παράσταση της δύναμης F_1, που δέχεται η δοκός ΑΒ από τη ράβδο, σε συνάρτηση με την παραμόρφωση x του ελατηρίου, από την $t_1 = \frac{T}{2}$, έως την $t_1 = T$, όπου T η περίοδος γ.α.τ. του Σ.

Δίνονται: $(A\Gamma) = 1\ m$, $g = 10\ m/s^2$ και για την ταλάντωση του Σ, θετική φορά προς τα κάτω. Η δοκός ΑΒ σε όλη τη διάρκεια ταλάντωσης του Σ, ισορροπεί οριζόντια.

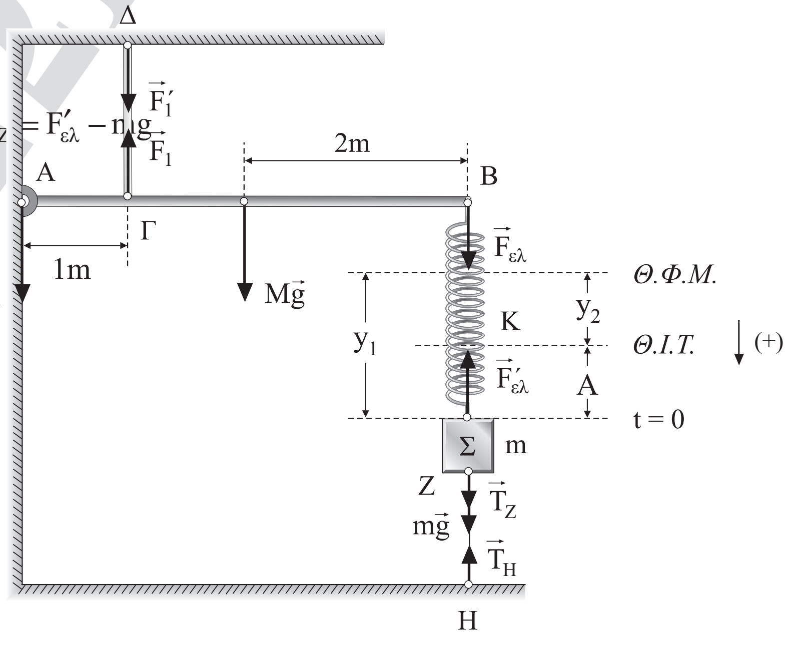
Λύση

α. Ισχύει: $F'_{\varepsilon\lambda} = Ky_1 = 50 \cdot 0,2 = 10\ N$

Επειδή το σώμα Σ ισορροπεί, ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \quad \Rightarrow \quad F'_{\varepsilon\lambda} = mg + T_Z \quad \Rightarrow \quad T_Z = F'_{\varepsilon\lambda} - mg$$

ή $\mathbf{T_Z = 5\ N}$



Στη δοκό ΑΒ ασκούνται:

– η δύναμη $\vec{F}_1$ από την αβαρή ράβδο

– το βάρος της $M\vec{g}$ στο μέσον της

– η αντίδραση της $F'_{\varepsilon\lambda} = F_{\varepsilon\lambda}$ στο σημείο Β

– η δύναμη από την άρθρωση $\vec{F}_A$ στο σημείο Α

Επειδή οι δυνάμεις $\vec{F}_1$, $M\vec{g}$ και $\vec{F}_{ελ}$ είναι κατακόρυφες και η $\vec{F}_A$ θα είναι κατακόρυφη, <u>με φορά έστω προς τα κάτω</u>. Η δοκός ισορροπεί:

$$\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = F_A + 20 + F_{ελ} \quad ή \quad F_1 = F_A + 30 \qquad (1)$$

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0$$

$$F_1 \cdot 1 = 20 \cdot 2 + F_{ελ} \cdot 4 \quad ή \quad F_1 = 40 + 40 \;\Rightarrow\; \mathbf{F_1 = 80\,N}$$

Από (1): $F_A = 50\text{ N}$, άρα η φορά της είναι όπως υποθέσαμε.

β. Το σώμα Σ, μετά την $t = 0$ εκτελεί γ.α.τ., με D = K.

Ισχύει:
$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \qquad (2)$$

Στην Θ.Ι.Τ. ισχύει: $\Sigma F = 0 \;\Rightarrow\; mg = Ky_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \dfrac{mg}{K} = 0{,}1\text{ m}$

Από το σχήμα έχουμε: $A = y_1 - y_2 \;\Rightarrow\; A = 0{,}1\text{ m}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = 10\text{ rad/s}$

Την $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση y = +A, άρα : $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}\text{ rad}$

Από (2):
$$y = 0{,}1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{S.I.} \qquad (3)$$

– Βρίσκουμε που είναι ο ταλαντωτής, δηλαδή σε ποια θέση είναι το σώμα Σ, την $t_1 = \dfrac{\pi}{10}\text{s}$

1ος τρόπος

Αντικαθιστώντας την $t_1 = \dfrac{\pi}{10}\text{s}$ στην (3) έχουμε:

$$y = 0{,}1\eta\mu\left(10\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\eta\mu\frac{3\pi}{2} = -0{,}1\text{ m}$$

Δηλαδή: $\mathbf{y = -A}$

2ος τρόπος

Βρίσκουμε την περίοδο της γ.α.τ.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ή \quad T = \frac{2\pi}{10} \;\Rightarrow\; T = \frac{\pi}{10}2 \;\Rightarrow\; T = 2t_1 \;\Rightarrow\; \mathbf{t_1 = \frac{T}{2}}$$

Δηλαδή το σώμα μάζας m, βρίσκεται στην θέση: $\mathbf{y = -A}$

Ο ταλαντωτής έχει διανύσει απόσταση (κατακόρυφη) : S = 2A ή S = 0,2 m

Παρατηρούμε ότι: $S = y_1 = 0{,}2\text{ m}$ με την $F_{ελ} = K \cdot 0 = 0\text{ N}$

(Αφού την $t_1 = \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{T}{2}$ το ελατήριο βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.)).

Η δοκός ΑΒ ισορροπεί: $\Sigma F_y = 0 \;\Rightarrow\; F_1' = F_A' + 20$ (4)

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0\,,\ \text{άρα}\ \ F_1' \cdot 1 = 20 \cdot 2 \;\Rightarrow\; F_1' = 40\ \text{N}\ \ \text{και από την (4):}\ \ \mathbf{F_A' = 20\ N}$$

γ. Έχουμε: $\dfrac{dp}{dt} = \Sigma F = -Ky$

Όμως την t_1, $y = -A$, άρα: $\dfrac{dp}{dt} = KA$ ή $\dfrac{dp}{dt} = 5\ \text{N}$, με φορά προς τα κάτω.

Ισχύει: $\dfrac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon = \Sigma F \cdot 0 = 0$

Γενικά ο ρυθμός $\dfrac{dK}{dt}$ γίνεται μηδέν όταν:

– $\Sigma F = 0$ (στη Θ.Ι.Τ.)

– είτε όταν $\upsilon = 0$ (θέσεις πλάτους), δηλαδή όταν αλλάζει το είδος της κίνησης!

δ. Η δοκός ΑΒ ισορροπεί.

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \;\Rightarrow\; F_1 \cdot 1 - Mg \cdot 2 - F_{\varepsilon\lambda} \cdot 4 = 0 \quad \text{ή} \quad F_1 = 40 + 4F_{\varepsilon\lambda}$$

Όμως: $F_{\varepsilon\lambda} = Kx$

Άρα: $F_1 = 40 + 4 \cdot 50x$ ή

$\mathbf{F_1 = 40 + 200x}$ με $\mathbf{(0 \le x \le 0,2)}$ S.I.

Την $t_1 = \dfrac{T}{2}$, $x = 0 \;\Rightarrow\; F_1 = 40\ \text{N}$

Την $t_1 = T$, $x = 0,2\ \text{m} \;\Rightarrow\; F_2 = 80\ \text{N}$