ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

<u>Άσκηση 1</u>

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη ομάδα, το 30% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: « ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: « ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα :

i) $A\cup B$ ii) $A\cap B$ iii) $B-A$ iv) A' (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχόμενων

i) ο μαθητής που επιλέχτηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) i) $A\cup B$ = «ο μαθητής να συμμετέχει σε μία τουλάχιστον από τη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα ποδοσφαίρου»

ii) $A\cap B$ = «ο μαθητής να συμμετέχει και στη θεατρική ομάδα και στην ομάδα ποδοσφαίρου»

iii) $B-A$ = « ο μαθητής να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου»

iv) A' = « ο μαθητής να μην συμμετέχει στην θεατρική ομάδα»

β) Ισχύει $P(A) = 25\%$, $P(B) = 30\%$ και $P(A\cap B) = 15\%$

i) $P(B-A) = P(B)-P(A\cap B) = 30\%-15\% = 15\%$

ii) $P(A\cup B)' = 1-P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1-(25\%+30\%-15\%) = 1-40\% = 60\%$

<u>Άσκηση 4</u>

Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

Β: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $B - A$ iii) A' (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα (Μονάδες 9)

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

Ισχύει $P(A) = \frac{20}{180}$, $P(B) = \frac{30}{180}$ και $P(A \cap B) = \frac{10}{180}$

α) i) $A \cup B$ = «ο μαθητής να συμμετέχει σε μία τουλάχιστον από τη θεατρική ομάδα ή την ομάδα στίβου»

Β-Α = «ο μαθητής συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου»

A' = «ο μαθητής δεν συμμετέχει στην θεατρική ομάδα»

β) i) $P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A \cup B)' = 1 - (\frac{20}{180} + \frac{30}{180} - \frac{10}{180}) = \frac{140}{180}$

ii) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{180} - \frac{10}{1\,80} = \frac{20}{180}$

Άσκηση 9

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παρακάτω πίνακα.

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος (Μονάδες 7)

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3 (Μονάδες 9)

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιος του 3 (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

Α = {12, 22, 32} Άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9}$

Β= {12} άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{9}$

Γ = {12,21,22,31,33} άρα $P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$

Άσκηση 2

Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ’ένα αυτοκίνητο και μετά από την διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2. Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

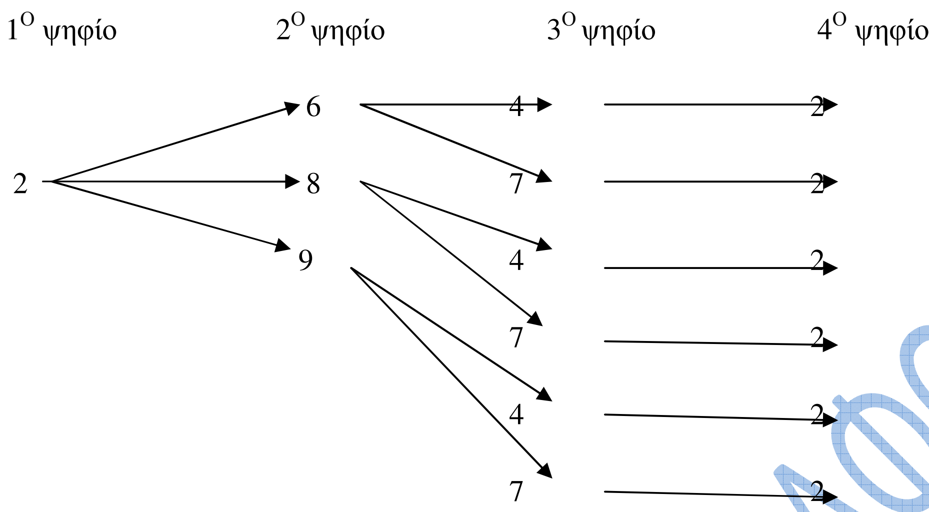
Β: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε το 8 ούτε το 9.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

Δενδοδιάγραμμα



Ω = { 2642, 2672, 2842, 2872, 2942, 2972 }

β) Α = { 2672, 2872, 2972 } $\quad P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Β = {2642, 2672, 2842, 2872 } $\quad P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Γ = { 2642, 2672 } $\quad P(\Gamma) = \dfrac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΤΟ 2^{Ο} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνονται οι παρακάτω παραστάσεις:

$A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$ (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) $2 \le x < 3 \Leftrightarrow 4 \le 2x < 6 \Leftrightarrow 0 \le 2x - 4 < 2$

Άρα $A = |2x - 4| = 2x - 4$

Επίσης $2 \le x < 3 \Leftrightarrow -1 \le x - 3 < 0$

Άρα $B = |x - 3| = -x + 3$

Οπότε $A + B = (2x - 4) + (-x + 3) = x - 1$

β) Έστω ότι υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε $A + B = 2$

Οπότε $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$ Αδύνατον αφού $2 \le x < 3$

Άρα δεν υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε $A + B = 2$

Άσκηση 3

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξυ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μοναδες 10)

γ) $\dfrac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) $2 \leq x \leq 3$ (1)

β) $\leq y \leq 2 \quad 1$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη σχέσεις (1), (2) οπότε έχουμε $3 \leq x+y \leq 5$

β) $2 \leq x \leq y \Leftrightarrow 4 \leq 2x \leq 6$ (3)

$1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3$ (4)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4) οπότε έχουμε:

$4+(-6) \leq 2x+(-3y) \leq 6+(-3) \Leftrightarrow -2 \leq 2x-3y \leq 3$

γ) Είναι $2 \leq x \leq 3$ (1)

και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$ (5)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (5) οπότε έχουμε:

$2\frac{1}{2} \leq x\frac{1}{y} \leq 3\;1 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$

Άσκηση 7

Δίνεται η παράσταση : $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει : $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$

Να αποδείξετε ότι :

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει $1 < x < 4$ άρα $x-1 > 0$

οπότε $|x-1| = x-1$

και $2 < y < 3$ άρα $y-3 < 0$

οπότε $|y-3| = -y+3$

Άρα έχουμε $A = |x-1| + |y-3| = x-1-y+3 = x-y+2$

β) $2 < y < 3 \Leftrightarrow -2 > -y > -3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2$

Άρα $1 < x < 4$ (1) και $-3 < -y < -2$ (2)

Προσθέτω κατά μέλη τις σχέσεις 1 και 2 οπότε έχουμε

$1-3 < x - y < 4 - 2 \Leftrightarrow -2 < x - y < 2 \Leftrightarrow -2 + 2 < x - y + 2 < 2 + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < A < 4$

Άσκηση 12

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 > 0$

β) Ισχύει $x^2 + 4x + 5 > 0$ άρα $|x^2 + 4x + 5| = x^2 + 4x + 5$

Επίσης $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$ άρα $|x^2 + 4x + 4| = x^2 + 4x + 4$ οπότε η παράσταση Β γράφεται:

$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| = (x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 4x + 4) =$

$= x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4 = 1$

Άσκηση 14

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $A \cdot B = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$

β) **<u>α) τρόπος</u>**

$\Pi = A^2 + B^2 = (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2 =$

$= 4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^{\,2} + 4 + 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^{\,2} = 4 + 3 + 4 + 3 = 14$

<u>β) τρόπος</u>

$\Pi = A^2 + B^2 = (A+B)^2 - 2AB = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 = 4^2 - 2 = 14$

Άσκηση 16

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι ισχύει : $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow (\alpha > 0)$

$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει

β) Από (α) ερώτημα αποδείχθηκε ότι:

$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ και ομοίως $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις παραπάνω ανισώσεις οπότε έχουμε:

$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

Άσκηση 20

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$ (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι ισχύει: $\alpha^3 < \alpha \Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha < 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)\,(\alpha+1) < 0$ το οποίο ισχύει αφού α>0, $\alpha-1 < 0$ και $\alpha + 1 > 0$

β) Ισχύει: $0< \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha^3 < 1$

Επίσης $0< \alpha < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > 1$

Άρα η διάταξη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο αριθμείται:

$$0< \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$$

Άσκηση 23

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2\leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2x + 2y$

Ισχύει : $4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14$ (1)

$2\leq y \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) οπότε έχουμε

$$12\leq 2x + 2y \leq 20 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20$$

β) Η περίμετρος του νέου ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι

$\Pi_1 = 2(x-1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y - 2$

Οπότε έχουμε : $4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14$

$2\leq y \leq 3 \Leftrightarrow 12 \leq y \leq 18$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$20\leq 2x + 6y \leq 32 \Leftrightarrow 18 \leq 2x + 6y - 2 \leq 30 \Leftrightarrow 18 \leq \Pi_1 \leq 30$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ 2^{O} ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση :$S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1) (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση (1) πρέπει $\Delta \geq 0$

Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4\cdot(\lambda^2 + \lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = -3\lambda^2 - 4\lambda + 4$

Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$ (2)

Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot(-3)\cdot 4 = 64$

Οπότε $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{4 \pm 8}{-6} =$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$

λ	$-\infty$	-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3\lambda^2 - 4\lambda + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Οπότε η (2) ισχύει αν $\lambda \in \left[-2, \frac{3}{3}\right]$

β) Από τύπους vietta έχουμε $S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-\lambda}{1} = \lambda$

και $P = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda^2 + \lambda - 1}{1} = \lambda^2 + \lambda - 1$

οπότε η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$S^2 - \square - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda^2+\lambda-1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1$$

Άσκηση 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1| = 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$ (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{ή} \\ 2x-1 = -3 \Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$

β) Ισχύει : $\alpha=-1$ και $\beta=2$ οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $-x^2+2x+3=0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 + 12 = 16 > 0$

Οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες :

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$x_1 = -1$

$x_2 = 3$

Άσκηση 3

Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι :

i) $A+B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε $A+B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{10}{25-5} = \frac{1}{2}$

ii) $A \cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} = \frac{1}{20}$

β) Η εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β είναι της μορφής:

$$x^2 - (A + B)x + A \cdot B = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$$

Άσκηση 4

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες , x_1 και x_2

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων : x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$

(Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

$\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ένα τριώνυμο πρέπει $\Delta > 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2(-1) = 25 + 8 = 33 > 0$

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου τότε από τύπους Vietta έχουμε

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Επίσης $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$

γ) Το τριώνυμο που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ είναι της μορφής :

$$x^2 - \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)x + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$ (Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει πραγματικές ρίζες ένα τριώνυμο πρέπει $\Delta \geq 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1(\lambda - 2) = 4 - 4\lambda + 8 = 12 - 4\lambda$

Οπότε $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 12 \geq 4\lambda \Leftrightarrow \lambda \leq 3$

β) Από τύπους Vietta έχουμε: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2}{1} = -2$

$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-2}{1} = \lambda-2$

Οπότε έχουμε: $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2(-2) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda - 2 + 4 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Η τιμή $\lambda = -1$ είναι δεκτή αφού πρέπει $\lambda \leq 3$

Άσκηση 6

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 13)

β) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με το 2. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Η παραπάνω εξίσωση 2ου βαθμού έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες αν $\Delta > 0$

Οπότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2) \Leftrightarrow \Delta = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = -4\lambda + 8$

Οπότε $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ με $\lambda \neq -2$

Άρα $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης τότε $x_1 + x_2 = 2$

Από τύπους Vietta $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{2\lambda}{\lambda+2}$

Άρα $-\dfrac{2\lambda}{\lambda+2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow -4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Η τιμή $\lambda = -1$ είναι δεκτή αφού $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

Άσκηση 7

Δίνεται το τριώνυμο : $x^2 - \kappa x - 2$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1).

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1)

(Μονάδες 13)

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2, όπου

$\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$. (Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\kappa)^2 - 4 \cdot 1(-2) \Leftrightarrow \Delta = \kappa^2 + 8 > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$

β) i) Από τύπους Vietta έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-3}{1} = 3$

και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-2}{1} = -2$

ii) Η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2 είναι της μορφής :

$x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2 = 0 \quad (1)$

Οπότε $\rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 3 = 6$

και $\rho_1 \cdot \rho_2 = (2x_1)(2x_2) = 4x_1 \cdot x_2 = 4(-2) = -8$

Τελικά η σχέση (1) γράφεται : $x^2 - 6x - 8 = 0$ που είναι και η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

ΤΟ $4^{Ο}$ ΘΕΜΑ

Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει : $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$ (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

γ) Για κάθε $\lambda \neq \frac{1}{2}$ είναι $\Delta > 0$ και η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες :

τις x_1 και x_2

Έχουμε $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{|x_1 - x_2|} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow S - 4□ = 1 \Leftrightarrow 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 1$

Άσκηση 2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0.$ (Μονάδες 9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης : $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 . x_2^2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

'Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) Είναι $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 18 - 7\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7 \cdot (-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

ii) Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 5x - 1 = 0$

Άρα $x_1^2 . x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 . x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$

$= (-1) \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -5 - 15 + 4 = -16.$

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι : $x_1 + x_2 = 2$ (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον :

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε :}$$

i) Να δείξετε ότι : $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4-4\lambda$. Όμως $\lambda > 1 \Leftrightarrow -4\lambda > -4 \Leftrightarrow 4(1-\lambda) > 0$.

Άρα $\Delta > 0$.

β) Είναι $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 2$

γ) i) Είναι $|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4$

ή $x_1 - 2 = - x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ (απορρίπτεται)

ii) Είναι : $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}$

Άρα $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 3(-1) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -3$

Άσκηση 4

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή : $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1) , αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού. (Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει να ισχύει ότι : $\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

β) Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ είναι $\lambda(\lambda-1)x^2 - (\lambda-1)(\lambda+1)x + (\lambda-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$ διαιρώντας κατά μέλη με $\lambda - 1 \neq 0$

γ) Η εξίσωση (1) έχει τη μορφή $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$

με $\Delta = [-(\lambda+1)]^2 - 4\cdot\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = (\lambda-1)^2 > 0$ $για\ \lambda \neq 1$

δ) Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$ έχει $\Delta = (\lambda-1)^2 > 0$

και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{(\lambda+1)\pm(\lambda-1)}{2\lambda} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 1 \\ \searrow x_2 = \frac{1}{\lambda} \end{array}$$

Άσκηση 5

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε , $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου να εκφράσετε το άθροισμα S= $x_1 + x_2$

συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου P= $x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 5)

γ) Αν λ<0 τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\Delta = [-(\lambda^2+1)]^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$

για κάθε , $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

β) Είναι S= $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και P= $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$

γ) i) Για $\lambda < 0$ είναι $\frac{\lambda^2+1}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow S < 0$ και επειδή P=1> 0 το τριώνυμο έχει ρίζες αρνητικές.

ii) είναι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |x_1 + x_2| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda^2+1|}{|\lambda|} \geq 2$

επειδή όμως λ< 0 η παραπάνω σχέση γράφεται $\frac{\lambda^2+1}{-\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 \geq -2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 + 2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$ $(\lambda + 1)^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει.

Άσκηση 6

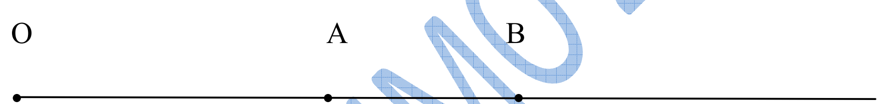
Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας , του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποσπάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο , S_A,S_B,S_Γ, και S_Δ αντίστοιχα ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$S_A < S_B$$

$$S_\Gamma = \frac{S_A+3S_B}{4} \quad \text{και}$$

$$|S_\Delta - S_A| = |S_\Delta - S_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α,Β παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων S_A,S_Bσε km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$S_A + S_B = 1{,}4 \quad \text{και} \quad S_A \cdot S_B = 0{,}45 \text{ τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς S_A,S_B

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις S_A,S_B,S_Γ,S_Δ (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση $|S_Δ - S_A| = |S_Δ - S_B| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_Δ - S_A = S_Δ - S_B \Leftrightarrow S_A = S_B$ (απορρίπτεται)

ή

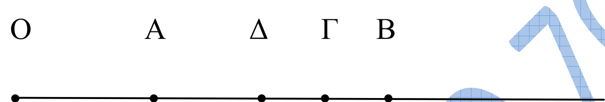
$\Leftrightarrow S_Δ - S_A = -S_Δ + S_B \Leftrightarrow S_Δ = \dfrac{S_A+S_B}{2}$

Έστω ότι $S_Δ < S_Γ \Leftrightarrow \dfrac{S_A+S_B}{2} < \dfrac{S_A+3S_B}{4} \Leftrightarrow 2S_A + 2S_B < S_A + 3S_B \Leftrightarrow S_A < S_B$ το οποίο ισχύει. Άρα $S_Δ < S_Γ$ (1)

Επίσης από τη σχέση $|S_Δ - S_A| = |S_Δ - S_B|$ προκύπτει ότι το σπίτι της Δήμητρας ισαπέχει από τα σπίτια του Βαγγέλη και της Άννας. Τέλος από τη σχέση

$S_Γ = \dfrac{S_A+3S_B}{4} \Leftrightarrow 4S_Γ = S_A + 3S_B < S_B + 3S_B$. Άρα $4S_Γ < 4S_B \Leftrightarrow S_Γ < S_B$ (2)

Όποτε από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε



β) i) Είναι S= $S_A + S_B = 1{,}4$ και P = $S_A \cdot S_B = 0{,}45$ άρα οι S_A, S_B είναι ρίζες της

εξίσωσης $x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0$

ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0$ και έχουμε Δ=0,16> 0 άρα οι ρίζες

είναι $x_1=0{,}5$ ή $x_2=0{,}9$ και επειδή $S_A < S_B$ έχουμε $S_A = 0{,}5$km και $S_B = 0{,}9$ km

Επίσης $S_Γ = \dfrac{S_A+3S_B}{4} = \dfrac{0{,}5+3\cdot 0{,}9}{4} = 0{,}8$ km

και $|S_Δ - S_A| = |S_Δ - S_B| \Leftrightarrow |S_Δ - 0{,}5| = |S_Δ - 0{,}9| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_Δ - 0{,}5 = S_Δ - 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}5 = 0{,}9$ (αδύνατη)

ή

$\Leftrightarrow S_Δ - 0{,}5 = -S_Δ + 0{,}9 \Leftrightarrow S_Δ = 0{,}7$